1. Пояснительная записка

Данная методическая разработка предназначена для студентов заочного отделения экономического факультета. В ней содержатся основные теоретические сведения с образцами решения типовых заданий, список необходимой литературы, примерный перечень вопросов к экзамену, а также варианты контрольных работ.

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» – общеобразовательная математическая дисциплина, объектом изучения которой является большая область математики, связанная понятиями случайности событий, измерением степени возможности появления этих событий, проведением экспериментальных исследований и математической обработкой их результатов, формулировкой полученных результатов.

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» читается студентам специальности “Экономика” в III и IV семестрах. Цель преподавания – ознакомить студентов с задачами и методами теории вероятностей и математической статистики в объёме, достаточном для успешного практического использования полученных знаний в дальнейшей работе по специальности, а также для самостоятельного изучения соответствующей научной литературы.

В результате изучения настоящего курса студент должен:

1) овладеть основами теории вероятностей, усвоив понятия множества элементарных исходов, алгебры случайных событий, вероятностной функции как числовой функции множеств, случайной величины, функции распределения случайной величины и числовых характеристик случайной величины;

2) ознакомится с методами и результатами решения классической предельной проблемы теории вероятностей, а также с применением этих результатов к решению задач статистической оценки значений числовых характеристик случайных величин и векторов и статистической проверки гипотез, построению простейших регрессионных моделей;

3) приобрести навыки практического решения вероятностных задач, поста-

новки задач проведения статистического эксперимента, научится приёмам и методам статистической обработки экспериментальных данных и формулированию обоснованных выводов по результатам этой обработки.

Согласно учебным планам для студентов предусмотрена контрольная работа. Выполнять работу следует на обычной ученической тетради в клеточку, и сдать на проверку до экзамена.

Своевременно и верно выполненная работа – необходимое условие сдачи экзамена по предмету. Выполненная не до конца, или содержащая ошибки контрольная работа не зачитывается, и возвращается студенту для повторного выполнения. Кроме того, на экзамене преподаватель может использовать контрольную работу для собеседования со студентом и задать по ней ряд вопросов. Поэтому студент, являясь на экзамен должен иметь при себе зачтенную контрольную работу.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в базовую часть математического цикла подготовки бакалавра по направлению «Экономика». Логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» предшествует общематематическая подготовка в объеме средней общеобразовательной школы или технического колледжа, а также таких дисциплин как «Линейная алгебра» и «Математический анализ».

В результате освоения предшествующих дисциплин студент должен:

знать*:*

- язык описания отношений, функций, специальные виды отношений:
- основные понятия, связанные с понятием «случайное событие»;
- основные принципы построения одномерных случайных величин и законов их распределений;
- теорию выборочного метода;
- оценка параметров распределения;

- основы проверки статистических гипотез;

- компьютерные методы решения задач математического анализа;

уметь*:*

- формально описывать отношения между объектами и функции от них;

- находить вероятности случайных величин;

- производить анализ и построение случайных величин;

- применять вычислительные методы решения задач математического анализа на компьютере;

владеть навыками*:*

- применения современного математического инструментария для решения экономических и социально-экономических задач;

- методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

быть компетентным:

– выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами;

– в осуществлении сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения поставленных экономических задач;

– в области инструментальных средств для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей;

– в области анализа результатов расчетов и обосновать полученные выводы;

в анализе и интерпретации полученных результатов.

Освоение данной дисциплины как предшествующей необходимо при изучении следующих дисциплин:

- Планирование и прогнозирование в экономике;
- Методы моделирования и прогнозирования экономики;
- Эконометрика.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»

– способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

– способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);

– способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

– способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

– способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

– способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6).

Содержание дисциплины

Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Случайные события и их вероятности.**	Основные определения, связанные с понятием «случайное событие». Пространство элементарных событий. Классическое определение вероятности. Формулы комбинаторики. Примеры. Статистическое и геометрическое определения вероятности. Алгебра событий. Аксиоматика А.Н. Колмогорова, выполнение аксиом для классической, статистической и геометрической вероятностей. Основные следствия аксиом. Условные вероятности, независимые события. Формулы полной вероятности и Бейеса. Повторение испытаний, формула Бернулли. Наивероят-

		нейшее число появлений события.
2.	**Одномерные случайные величины и законы их распределения**	Понятие о случайной величине. Ряд распределения дискретной случайной величины; функция распределения, ее свойства. Плотность распределения, ее свойства. Математическое ожидание случайной величины. Дисперсия случайной величины. Коэффициент вариации. Моменты случайной величины. Геометрическое, биномиальное распределения, распределения Пуассона и равномерное. Показательное и нормальное распределения.
3.	**Выборочный метод. Оценки параметров распределения.**	Задачи математической статистики. Выборочная совокупность. Способы организации выборки. Статистический ряд. Эмпирическая функция распределения. Полигон, гистограмма. Основные выборочные характеристики и их свойства. Статистическое оценивание параметров. Точечные оценки параметров и их свойства. Несмещенность, состоятельность и эффективность. Неравенство информации. Метод моментов и метод максимального правдоподобия. Точечные оценки математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$. Интервальные оценки параметров распределения, точность и надежность оценки. Распределение Стьюдента, хи-квадрат, Фишера. Доверительные интервалы для $M(X)$ и $D(X)$ нормальной случайной величины *X*.
4.	**Проверка статистических гипотез.**	Статистическая проверка гипотез: основные типы гипотез и общая логическая схема статистического критерия. Характеристики качества критерия. Проверка гипотезы о числовых значениях параметров: проверка гипотез $M(X)=a_0$; $M(X)=M(Y)$ для нормальных с.в. *X* и *Y*. Проверка гипотезы о числовых значениях параметров: проверка гипотез $D(X)=\sigma_0^2$; $D(X)=D(Y)$ для нормальных с.в. X и Y. Критерии согласия Пирсона .
5.	**Основы статистического исследования зависимостей.**	Виды зависимостей между случайными величинами. Парные корреляция и регрессия. Корреляционная таблица. Выборочный коэффициент корреляции. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции; доверительный интервал для него.

Основные теоретические сведения
с образцами решения типовых заданий

Тема1. Случайные события и их вероятности.

Теория вероятностей рассматривает следующую модель изучаемых явлений реальной жизни. Проводится опыт или испытание, результат которого называется случайным событием или просто – событием.

Пример: Опыт: бросание монеты. В результате опыта может выпасть орел – одно событие или решка – другое событие. Поскольку выпадение орла или решки зависит от случая, то каждый из указанных выше исходов опыта есть случайное событие.

Виды случайных событий.

Опр1: Событие называется достоверным и обозначается Ω (омега), если оно обязательно происходит в результате испытания.

Опр2: Событие называется невозможным ($\varnothing$), если оно не может произойти в результате опыта.

Опр3: События называются равновозможными, если появление одного из них в результате испытания не является более возможным, чем появление другого события.

Опр4: Два события называются несовместными, если они не могут произойти одновременно в одном испытании.

Опр5: События, которые в рассматриваемом опыте могут произойти одновременно, называются совместными.

Опр6: Событие А называется благоприятствующим событию В, если из того, что произошло событие А следует, что произошло событие В ($A \subset B$).

Опр7: События А и В называются равными, если каждое из них благоприятствует другому.

Опр8: Множество всех равновозможных событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате испытания обязательно происходит и любые два из которых несовместны, называются множеством или пространством элементарных событий или полной группой событий рассматриваемого опыта (ПГС).

Каждое событие из этого опыта называется элементарным событием.

Алгебра событий.

Опр1: Суммой двух событий А и В называется событие, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из событий А или В.

Опр2: Произведением двух событий А и В называется событие, состоящее в том, что происходит каждое из событий А и В ($A \cdot B$).

Опр3: Разностью событий А и В называется событие, состоящее в том, что происходит событие А и не происходит событие В (А \ В).

Опр4: Разностью между достоверным событием и событие А называется событие, противоположное событию А ($\bar{A} = \Omega \setminus A$).

Классическое определение вероятности случайного события: Вероятностью случайного события А называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию А, к общему числу всех элементарных событий, входящих в ПГС.

$P(A) = \frac{m}{n}$, где n – число всех элементарных событий,

m - число элементарных событий, благоприятствующих событию А.

Свойства вероятностей:

1) $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$;

2) $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

Классическое определение вероятности служит хорошей математической моделью тех случайных явлений, для которых исходы опыта в каком – либо смысле симметричны и поэтому представляется естественным предположение об их равновозможности (лотереи, азартные игры и т.д.).

Опр: Относительной частотой случайного события А называется отношение числа испытаний, в котором событие А появилось к числу фактически проведенных испытаний.

Пример: При проведении 24 выстрелов в мишени 19 попаданий.

А – «поражение цели». О. Ч. А: $W(A) = \frac{19}{24}$.

Оказывается, что относительная частота случайного события обладает следующим свойством устойчивости: при увеличении числа испытаний она стремится к некоторому постоянному числу, которое оказывается равным вероятности события этого.

Таким образом, относительная частота события приближенно равна вероятности этого события.

При статистическом определении в качестве вероятности принимают его относительную частоту.

Элементы комбинаторики.

При решении многих теоретико-вероятностных задач требуется уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. Эти вопросы решаются

в разделе математики, называемом комбинаторикой. Приведем основные понятия и формулы, необходимые нам в дальнейшем.

Пусть имеется конечное множество, состоящее из n элементов.

Опр1: Всякое упорядоченное множество, которое содержит k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называется размещением без повторений из n элементов по k. Число всех таких размещений обозначают A_n^k находят по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1), (k \geq n).$$

Опр2: Размещения из n элементов по n называются перестановками из n элементов. Число всех перестановок из n элементов обозначается через P_n и, очевидно, равно произведению натуральных чисел от 1 до n. Итак, $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. По определению считают, что 0!=1.

Опр3: Сочетанием из n элементов по k без повторений называется всякое неупорядоченное множество, которое содержит k различных элементов, выбранных из данных n элементов. Число всех таких сочетаний обозначают символом C_n^k.

Справедливы формулы:

1) $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

3) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Опр4: Размещением с повторениями из n элементов по k называется всякое упорядоченной множество, содержащее k элементов, выбранных из данных n элементов, причем выбранные элементы могут повторяться до k раз. Число всех таких размещений находят по формуле

$$\overline{A_n^k} = n^k, (n \geq 1, k \geq 1).$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий.

Теорема1: Если A и B – несовместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствие1: Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - попарно несовместные события, то $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Следствие2: $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

Теорема2: Если A и B – совместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Теорема3: Если события A и B – независимы, то $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.

Следствие1: Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности, то $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

Следствие2: Вероятность события А, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot ... \cdot P(\overline{A_n})$.

Опр: Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Теорема4: Если А и В – зависимые события, то $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Формула полной вероятности. Вероятности гипотез. Формулы Байеса.

Пусть событие А может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий. Тогда событие А находится по формуле полной вероятности:

$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$.

Пусть событие А может наступить как и выше при появлении одной из гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса: $P_A(H_i) = \dfrac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, (i = 1,2,...,n)$,

где Р(А) находится по формуле полной вероятности. Типичными применениями формул Байеса являются применения их в задачах «распознавания образов».

Повторные независимые испытания.

Опр: Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А одинакова и равна p, событие А наступит k раз, вычисляется по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Если число испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытаний мала ($p \le 0{,}1$), то пользуются приближенной формулой Пуассона: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

При большом числе независимых испытаний в виду громоздкости вычислений пользоваться формулой Бернулли достаточно трудно, поэтому применяют локальную теорему Лапласа, позволяющую приближенно найти искомую вероятность:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для вычисления вероятности $P_n(k_1; k_2)$ того, что в n независимых испытаниях событие А появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз используется <u>интегральная теорема Лапласа</u>, в силу которой $P_n(k_1; k_2) \approx \phi(x^{//}) - \phi(x^{/})$, где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа,

$$x^{/} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x^{//} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

При x > 5 полагают $\phi(x) = 0{,}5$. При нахождении $\phi(x)$ для отрицательных значений x учитывают нечетность функции Лапласа ($\phi(-x) = -\phi(x)$).

Образцы решения типовых заданий.

<u>Пример1</u>: Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, и набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры:

а) если известно, что эти цифры различны;

б) если нет никакой информации о двух последних цифрах.

Решение: Обозначим через А событие «набраны две нужные цифры».

а) Всего можно набрать столько пар различных цифр, сколько может быть составлено размещений без повторений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число всех элементарных событий, образующих полную группу событий, равно 90. Благоприятствует событию А лишь одно элементарное событие. Тогда по определению вероятности $P(A) = \frac{1}{90}$.

б) Во втором случае среди двух последних цифр могут быть и повторяющиеся цифры. Поэтому в полной группе событий число всех элементарных событий равно $\overline{A_{10}^2} = 10^2 = 100$ и лишь одно из них благоприятствует событию А. Тогда $P(A) = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

<u>Пример2</u>: В партии из 13 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад деталей три детали окажутся стандартными.

Решение: Испытание состоит в том, что из 13 деталей выбирают пять деталей. Так как выбор осуществляется наугад, то все исходы испытания равновозможны и кроме того, они совместны. Поскольку выборка состоит из пяти деталей и порядок их расположения в вы-

борке не учитывается, то число всех элементарных событий, образующих ПГС, равно $n = C_{13}^5$.

Пусть событие В состоит в том, что в выборке окажутся три стандартные детали и, значит, две – нестандартные детали. Три стандартные детали из семи можно отобрать C_7^3 способами, а две нестандартные детали из шести можно выбрать C_6^2 способами. Каждый из способов выбора 3 стандартных деталей сочетается с каждым из способов выбора 2 нестандартных деталей, поэтому событию В благоприятствует $m = C_7^3 \cdot C_6^2$ элементарных событий.

Искомая вероятность равна $P(B) = \dfrac{m}{n} \approx 0{,}4$.

Пример3: Вероятность поражения цели одной ракетой равна 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность поражения одной и той же цели, если обе ракеты стартуют одновременно.

Решение1: Испытание состоит в том, что две ракеты выпущены по цели. Через $A_i, i = 1{,}2$, обозначим событие, состоящее в поражении цели i – той ракетой. Тогда $P(A_1) = 0{,}7;\ P(A_2) = 0{,}8$. Через А – обозначим событие: цель поражена.

Событие $A_1 + A_2$ означает, что хотя бы одна ракета поразила цель, следовательно, $A = A_1 + A_2$.

События A_1, A_2 по условию задачи совместны и независимы, значит, в силу теорем 2 и 3 $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.

Решение2: Событие А состоит в том, что хотя бы одна ракета поразила цель. Поэтому в силу следствия 2 из теоремы 3 получаем $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}94$.

Пример4: В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наугад взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Решение: Рассмотрим событие А – первый учебник в переплете, В – второй учебник в переплете, С – оба учебника в переплете. Тогда С = АВ.

Имеем $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, а вероятность того, что второй имеет переплет при условии, что первый учебник был в переплете, т.е. условная вероятность события В равна $P_A(B) = \dfrac{2}{5}$.

Искомую вероятность найдем по теореме4: $P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 0{,}2$.

Пример5: Имеется два набора по десять деталей. В первом наборе восемь стандартных, во втором – девять стандартных, остальные – нестандартные. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь из взятого наугад набора стандартна.

Решение: Пусть событие А – «извлеченная деталь стандартна». Эта деталь может быть извлечена из первого набора (гипотеза H_1) или второго набора (гипотеза H_2). Тогда

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}, \quad P_{H_1}(A) = 0{,}8; \quad P_{H_2}(A) = 0{,}9.$$

По формуле полной вероятности $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85$.

Пример6: Пусть выполнены условия примера1 и известно, что извлечена стандартная деталь. Требуется определить вероятность того, что эта деталь из первого набора.

Решение: Применяя формулу Байеса, имеем $P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}8}{0{,}85} = \dfrac{8}{17}$.

Пример7: В семье пятеро детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика, если вероятности рождения мальчиков и девочек считать одинаковыми.

Решение: По условию вероятность рождения мальчика p = 0,5, тогда q = 1 – p = 0,5. По формуле Бернулли найдем искомую вероятность:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Пример8: Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет три негодных изделия.

Решение: По условию n = 5000, p = 0,0002, k = 3. Найдем $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$.

Искомую вероятность вычислим по формуле Пуассона:

$$P_{5000}(3) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

Пример9: Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если в каждом испытании $P(A) = p = 0{,}2$.

Решение: По условию n = 400, k = 80, p = 0,2, q = 0,8. Применим локальную теорему Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8}\varphi(x).$$

Вычислим $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(0)=0{,}3989$. Тогда искомая вероятность $P_{400}(80)\approx\frac{1}{8}\cdot 0{,}3989=0{,}04986$.

Пример10: вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна p = 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется от 70 до 100 деталей, не прошедших проверку ОТК.

Решение: По условию n = 400, $k_1=70$, $k_2=100$, p = 0,2, q = 0,8. В силу интегральной теоремы Лапласа: $P_{400}(70;100)\approx\phi(x^{//})-\phi(x^{/})$. Вычислим $x^{/}$ и $x^{//}$:

$$x^{/}=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25;\quad x^{//}=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}5.$$

С учетом нечетности функции Лапласа имеем: $P_{400}(70;100)\approx\phi(2{,}5)-\phi(-1{,}25)=\phi(2{,}5)+\phi(1{,}25)$.

По таблице значений функции $\phi(x)$ находим $\phi(2{,}5)=0{,}4938$; $\phi(1{,}25)=0{,}3944$.

Окончательно $P_{400}(70;100)\approx 0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882$.

Тема 2. Случайные величины и их числовые характеристики.

Дискретные случайные величины и их распределения. Числовые характеристики Д. С. В.

Опр1: Случайной величиной называется такая переменная, которая в зависимости от исходов испытания может принимать те или иные значения с определенной вероятностью.

Пример: Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия есть случайная величина, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый промежуток [a; b].

Опр2: Случайная величина называется дискретной случайной величиной (д.с.в.), если ее возможные значения суть отдельные изолированные числа, которые она принимает с определенными вероятностями (см. пример1).

Опр3: Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка (см. пример2).

Случайные величины обозначают большими буквами X, Y, …, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами x, y,…

Опр4: Законом распределения д.с.в. или просто распределением д.с.в. называют соответствие между возможными значениями д.с.в. и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически и графически.

При табличном задании закона распределения д.с.в. X первая строка содержит возможные значения x_i, а вторая – их вероятности p_i:

X $\quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$

P	p_1	p_2	…	p_n,

где $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

При аналитическом задании закон распределения д.с.в. задается формулой $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$.

Опр5: Биномиальным называют распределения д.с.в. X – числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых P(A) = p; вероятность возможного значения X = k (числа «k» появления события A) вычисляют по известной формуле Бернулли $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Если n велико, а $p \le 0{,}1$, то для нахождения $P(X = k)$ применяют приближенную формулу Пуассона и говорят, что д.с.в. X распределена по закону Пуассона, или имеет распределение Пуассона. Известны и другие распределения д.с.в.

Универсальным способом задания случайной величины X (и дискретной и непрерывной) является задание ее функции распределения F, которая определяется равенством: $F(x) = P(X < x)$, где $x \in R$. Каждая функция распределения не убывает на К, непрерывна слева в любой точке $x \in R$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Замечание1: Обобщая рассуждения при нахождении функции распределения конкретной д.с.в. X, получаем, что если x_1 и x_n - соответственно наименьшее и наибольшее значения произвольной д.с.в. X, то ее функция распределения F является ступенчатой (кусочно-монотонной) функцией и определяется соотношением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad при \quad x \le x_1; \\ P_k = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i, \quad при \quad x_k < x \le x_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-1}; \quad p_i = P(X = x_i); \\ 1, \quad при \quad x > x_n. \end{cases}$$

Опр6: Сумму $P_k = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$, где $p_i = P(X = x_i)$ называют накопленной вероятностью. Вычисление P_k удобно производить, присоединив к таблице распределения д.с.в. X третью строку.

Так, в рассматриваемом выше примере2 имеем:

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25
P_k	0,25	0,75	1.

Замечание2: Зная функцию распределения случайной величины X, можно определить вероятность попадания X в промежуток [a; b) по формуле $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Тогда $P(a < X < b) = P(a \le X < b) - P(X = a) = F(b) - F(a) - P(X = a)$,

$$P(a < X \le b) = P(a \le X < b) - P(X = a) + P(X = b) = F(b) - F(a) - P(X = a) + P(X = b),$$

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) + P(X = b) = F(b) - F(a) + P(X = b).$$

Числовыми характеристиками д.с.в. являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Опр7: Математическим ожиданием M(X) д.с.в. X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$,

Или, если д.с.в. X принимает счетное множество значений, $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, причем лишь в случае абсолютной сходимости ряда. Если это не так, то говорят, что д.с.в. X не имеет математического ожидания.

Оказывается. Что M(X) приближенно равно среднему арифметическому возможных значений д.с.в. X. Для биномиально распределенной д.с.в. X M(X) = np.

Опр8: Дисперсией D(X) д.с.в. X называют математическое ожидание квадрата отклонения X от ее математического ожидания: $D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2$.

Справедлива формула: $D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X)$.

Если д.с.в. X имеет биномиальное распределение. То D(X) = npq, где q = 1 – p.

Если д.с.в. X распределена по закону Пуассона, то M(X) = D(X) = λ /

Опр9: Средним квадратичным отклонением (с.к.о.) $\sigma(X)$ д.с.в. X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Дисперсия и с.к.о. служат характеристиками рассеяния возможных значений д.с.в. вокруг ее математического ожидания.

Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.

Опр1: Случайная величина X называется непрерывной случайной величиной (н.с.в.), если ее функция распределения F непрерывно-дифференцируема.

В этом случае существует производная функции распределения, которую называют плотностью распределения вероятностей (или плотностью вероятности) н.с.в. X и обозначают через f.

Таким образом $f(x) = F'(x)$.

Плотность вероятности н.с.в. X неотрицательна на R и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Зная плотность вероятности н.с.в. X, можно найти ее функцию распределения по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Ввиду этого равенства функцию распределения F называют также интегральной функцией распределения. Поскольку $f(x) = F^{/}(x)$, то плотность вероятности называют также дифференциальной функцией распределения н.с.в. X.

Если X – н.с.в., а x_0 - фиксированная точка, то $P(X = x_0) = 0$. Поэтому для н.с.в. X справедливы равенства:

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математическое ожидание и дисперсия н.с.в. X, возможные значения которой принадлежат интервалу]a;b[, определяются равенствами:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx; \; D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Справедлива формула $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)$.

Если значения н.с.в. X принадлежат всему множеству R, то в указанных интегралах $a = -\infty; b = +\infty$.

Среднее квадратичное отклонение н.с.в. X определяется, как и для д.с.в.: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Перечислим теперь основные типы распределений н.с.в., указав их плотности и числовые характеристики:

1. Равномерное распределение на отрезке [a; b], a < b:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}; \quad M(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

2. Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}; \qquad M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Нормальное (или гауссовское) распределение с параметрами $(a;\sigma)$, $(\sigma > 0, -\infty < a < +\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \qquad M(X) = a; \qquad \sigma(X) = \sigma.$$

Нормальное распределение с параметрами (0; 1) называют нормированным или стандартным нормальным распределением. Для нормальной н.с.в. X имеют место соотношения:

$P(\alpha < X < \beta) = \phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$; $\quad P(|X - a| < \delta) = 2\phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, где ϕ - функция Лапласа.

Образцы решения типовых заданий.

Пример1: Найти закон распределения числа выпадений «герба» при двух бросаниях монеты.

Решение: Случайная величина X есть число выпадений «герба» при двух бросаниях монеты. При двух бросаниях монеты «герб» может ни разу не выпасть, выпасть один или два раза. Поэтому возможные значения X: $x_1 = 0$, $x_2 = 1, x_3 = 2$.

Д.с.в. X имеет биномиальное распределение вероятностей, т.к. испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. Поэтому соответствующие вероятности найдем по формуле Бернулли, считая $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

$$P(X = x_1) = P_2(0) = C_2^0 p^0 q^{2-0} = \frac{1}{4};$$

$$P(X = x_2) = P_2(1) = C_2^1 p^1 q^{2-1} = \frac{1}{2};$$

$$P(X = x_3) = P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{1}{4}.$$

Искомый закон запишем в табличном виде:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$.

Контроль: $\sum p_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

Пример2: Найти функцию распределения д.с.в. X из примера1:

Решение: Возможные значения д.с.в. X: 0, 1 и 2 разбивают все множество R на промежутки $(-\infty;0] \cup (0;1] \cup (1;2] \cup (2;+\infty) = R$. Найдем значения F(x) – функции распределения д.с.в. X в каждом из этих промежутков:

1) $x \le 0 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(\varnothing) = 0;$

2) $x \in (0;1] \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}25$;

3) $x \in (1;2] \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P((X = 0) + (X = 1)) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$;

4) $x > 2 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(\Omega) = 1$.

Следовательно, $F(x) = \begin{cases} o, & x \le 0; \\ 0{,}25, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}75, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Пример3: Найти M(X) и D(X) для д.с.в. X из примера1.

Решение: Так как n = 2, p = 0,5, q = 0,5, то M(X) = np = 1; D(X) = npq = 0,5.

Пример4: Д.с.в. X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна $p_1 = 0{,}6$, математическое ожидание M(X) = 1,4, дисперсия D(X) = 0,24. Найти закон распределения д.с.в. X.

Решение: Сумма вероятностей всех возможных значений д.с.в равна единице, поэтому вероятность принятия случайной величиной X значения x_2 равна $p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Закон распределения X в виде таблицы запишется следующим образом:

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4.

Чтобы найти x_1 и x_2, надо составить уравнения. Связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2.

По определению $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2$, а по условию M(X) = 1,4, следовательно $x_1 \cdot 0{,}6 + x_2 \cdot 0{,}4 = 1{,}4$.

Для составления второго уравнения выразим известную дисперсию через x_1 и x_2. Закон распределения X^2 имеет вид:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,6	0,4.

Поэтому $M(X^2) = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2$.

Для дисперсии имеем $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}4^2$.

Так как по условию D(X) = 0,24, то $0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2$.

Для определения x_1 и x_2 получаем систему уравнений: $\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4; \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1{,}8, \\ x_2 = 0{,}8. \end{cases} \end{array} \right.$

По условию $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение. Зная x_1 и x_2, запишем искомый закон распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4.

Пример5: Найти плотность вероятности. Математическое ожидание, дисперсию и $P(-1 \le X \le \frac{1}{2})$ н.с.в. X, заданной интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Решение: Так как $f(x) = F'(x)$, то $f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ 1 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$

1) Определим математическое ожидание: $M(X) = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 1dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

2) Найдем дисперсию: $D(X) = \int_0^1 x^2 f(x)dx - M^2(X) = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

3) $P(-1 \le X \le \frac{1}{2}) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Пример6: Вес нетто консервных банок с печенью трески, выпускаемых Мурманским консервным заводом ООО «Арго М» является случайной величиной, имеющей нормальное распределение со средним весом 230г и средним квадратичным отклонением, равным 5г. определить вероятность того, что: a) вес наудачу взятой банки не менее 225г и не более 240г;

b) отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превышает 8г.

Решение: Обозначим через X случайную величину – вес нетто консервной банки. По условию задачи X имеет нормальное распределение с параметрами a = 230, $\sigma = 5$. Применяя указанные выше формулы. Получим

a) $P(225 < X < 240) = \phi\left(\frac{240-230}{5}\right) - \phi\left(\frac{225-230}{5}\right) = \phi(2) + \phi(1) = 0{,}3413+0{,}4772=0{,}8185$;

b) $P(|X - 230| < 8) = 2\phi\left(\frac{8}{5}\right) = 2\phi(1{,}6) = 2 \cdot 0{,}4452 = 0{,}8904$.

Тема 3. Основы выборочного метода. Статистические оценки параметров распределения.

Генеральная и выборочная совокупности. Виды выбора.

Пусть требуется изучить совокупность однородных обьектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти обьекты.

Пример: Если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность деталей, а количественным – контролируемый размер деталей.

Для изучения этой совокупности иногда проводится сплошное обследование, т.е. обследуется каждый из обьектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике этот вид обследования проводится редко, особенно в тех случаях, когда обследование связано с уничтожением обьектов. В таких случаях из всей совокупности обьектов отбирают ограниченное число обьектов и их подвергают изучению.

Опр1: Вся изучаемая совокупность обьектов называется генеральной совокупностью.

Опр2: Выборочной совокупностью (выборкой) называют совокупность случайно отобранных обьектов из генеральной совокупности.

Опр3: Выборка называется повторной, если отобранный обьект перед отбором следующего обьекта возвращается в генеральную совокупность. В противном случае – бесповторной.

Опр4: Для того, чтобы по данной выборке можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы обьекты выборки правильно представляли этот признак. В этом случае говорят о представительной или репрезентативной выборке. В противном случае – о нерепрезентативной выборке.

В силу закона больших чисел ТВ выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно, т.е. всякий обьект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, и если все обьекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Вариационный ряд.

Пусть изучается некоторый количественный признак X ГС. Из этой ГС извлечена выборка обьема n, причем значения признака X: $x_1, x_2, ..., x_k$ наблюдались $\begin{matrix} x_1 - n_1 - раз, \\ ... \\ x_k - n_k - раз. \end{matrix}$ Тогда $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Опр1: Наблюдаемые значения x_i признака X называются вариантами, а последовательность, записанная в возрастающем порядке, называется вариационным рядом.

Опр2: Числа наблюдений вариантов называются частотами варианта, а их отношения к обьему выборки называются относительными частотами вариант x_i: $\frac{n_i}{n} = w_i$.

Опр3: Статистическим распределением выборки (СРВ) называется соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами или относительными частотами.

СРВ задают в виде соответствующей таблицы или в виде последовательностей интервалов и соответствующих им частот, равных сумме частот вариант, попавших в этот интервал. В последнем случае говорят об интервальном вариационном ряде.

Опр4: Выборочной или эмпирической функцией распределения выборки (ЭФР) называют функцию $F^* : F^*(x) = W(X < x)$

Пусть известно СРВ частот количественного признака X и пусть n_x - число частот вариант, которые меньше, чем x, а n – обьем выборки. Тогда $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$.

Относительная частота события $W(X < x)$, т.е. F^* по вероятности стремится к F(x).

Свойства выборочной функции распределения:

1) $E_{F^*} = [0;1]$;

2) F^* - неубывающая функция;

3) Если x_1 - наименьшая из вариант, а x_n - наибольшая из вариант, тогда

$x \le x_1 \Rightarrow F^*(x) = 0$;

$x > x_n \Rightarrow F^*(x) = 1$.

Полигоны и гистограммы.

Кроме ЭФР, ее графика бывает полезно изобразить аналоги ДФР, т.е. плотности вероятности. Это принято делать 2 способами, рассматривая полигоны и гистограммы.

Опр1: Полигоном частот называют ломанную с вершинами в точках $(x_i; n_i)$, где

x_i - варианты вариационного ряда,

n_i - соответствующие частоты.

Опр2: Полигоном относительных частот называют ломанную с вершинами в точках $(x_i; w_i)$.

Один полигон получается из другого с помощью сжатия или растяжения вдоль оси ординат в n-раз, где n – обьем выборки.

Для построения гистограмм частот и относительных частот весь интервал, в который заключены все наблюдаемые значения признака разбивают на ряд частичных интервалов одинаковой длины h и находят сумму частот m_j и относительных частот w_j вариант, попавших в j-тый интервал.

Опр3: Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты которых равны плотностям частот, т.е. $\frac{m_j}{h}$.

Опр4: Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты которых равны плотностям относительных частот, т.е. $\frac{w_j}{h}$.

Площадь гистограммы частот численно равна обьему выборки, а площадь гистограммы относительных частот равна 1, т.е. $S_{г.ч.} = n, \sigma_{г.о.ч.} = 1$.

Понятие статистических оценок параметров распределения. Точечные оценки и требования, предъявляемые к ним.

Пусть требуется изучить количественный признак X некоторой ГС. В распоряжении исследования имеются лишь значения этого признака $x_1, x_2, ..., x_n$, полученные в результате n – наблюдений или испытаний.

Повторяя выборку обьема n в качестве вариант мы будем иметь другие значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Поэтому при изучении признака X данные выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ рассматривают как СВ $X_1, X_2, ..., X_n$.

Пусть из теоретических соображений установлено какое распределение имеет признак X, тогда возникает задача оценки параметров этого распределения.

Опр1: Функцию от СВ $X_1, X_2, ..., X_n$, которая дает приближенно значения оцениваемого параметра, называют статистической оценкой этого параметра.

Пример1: M(X) = a. Статистической оценкой является $\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{a}$. $M(X) \approx \overline{X}$.

Опр2: Статистическая оценка неизвестного параметра называется точечной (т.с.о.), если она определяется одним числом.

Пусть θ^* является т.с.о. неизвестного параметра θ. Производится выборка обьема n, и по ней найдено значение θ^*_1. Повторяя выборку обьема n находим значения т.с.о. $\theta^*_2, ..., \theta^*_k$. Т.о., т.с.о. θ^* является СВ, а $\theta^*_1, \theta^*_2, ..., \theta^*_k$ - ее возможные значения.

Опр3: Т.с.о. θ^* называется несмещенной, если $M(\theta^*) = \theta$ (равна оцениваемому параметру) для любого n и смещенной в противном случае.

Опр4: Эффективной называют т.с.о., которая при заданном обьеме выборки n имеет наибольшую дисперсию.

При больших обьемах выборки к т.с.о. применяется требования состоятельности.

Опр5: Т.с.о. θ^* называется состоятельной, если она по вероятности стремится к оцениваемому параметру.

Генеральная и выборочная средняя. Оценка генеральной и выборочной средней.

Пусть изучается дискретная ГС относительно некоторого количественного признака X.

Опр1: Генеральной средней $\overline{x_Г}$ называется среднее арифметическое значение признака X.

Если обьем генеральной совокупности равен N и все значения признака различны, то $\overline{x_Г} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N}$.

Если же значения признака x_i имеют значения N_i, то $\overline{x_Г} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} N_i x_i}{N}$.

Опр2: Эмпирической (или выборочной) средней $\overline{x_B}$ называется среднее арифметическое значений признака X, полученных по результатам выборки обьема n:

1) $\overline{x_B} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ (все частоты равны 1);

2) $\overline{x_B} = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} n_i x_i}{n}$ (частоты отличны от 1).

Изучая количественный признак X требуется оценить генеральную среднюю. Оказывается, что «хорошей» оценкой оценкой для $\overline{x_Г}$ является $\overline{x_B}$.

Повторяя каждый раз выборку обьема n, мы получаем различные значения выборочной средней. Поэтому на выборочную среднюю можно смотреть как на СВ.

Рассматривая величину признака X тоже как СВ, найдем математическое ожидание этой СВ:

$M(X) = \overline{x_Г}$

Если признак X имеет непрерывное распределение, то опираясь на полученные соотношения для ДСВ, полагают по определению: $x_Г = \overline{M}(X)$.

Выборочная средняя является несмещенной оценкой для генеральной средней, т.е. $M(\overline{x_B}) = \overline{x_Г}$.

Опр.: Генеральная дисперсия, выборочная дисперсия и СКО обозначаются символами и определяются соотношениями:

1) $D_Г = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x_Г}\right)^2}{N}$, если все значения X различны;

2) $D_Г = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} N_i\left(x_i - \overline{x_Г}\right)^2}{N}$, если есть повторяющиеся значения X;

$\sigma_Г = \sqrt{D_Г}$;

1) $D_В = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_В}\right)^2}{n}$, если все значения X различны;

2) $D_В = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} n_i\left(x_i - \overline{x_В}\right)^2}{n}$, если есть повторяющиеся значения X;

$\sigma_В = \sqrt{D_В}$.

Справедливы следующие утверждения:

Утв1: $D_В = \overline{x_В^{\,2}} - \overline{x_В}^{\,2}$, где $\overline{x_В} = \dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$, $\overline{x^2{}_В} = \dfrac{\sum n_i x_i^{\,2}}{\sum n_i}$.

Утв2: $D_Г = \overline{x_Г^{\,2}} - \overline{x_Г}^{\,2}$, где $\overline{x_Г} = \dfrac{\sum N_i x_i}{\sum N_i}$, $\overline{x^2{}_Г} = \dfrac{\sum N_i x_i^{\,2}}{\sum N_i}$.

Утв3: $M(D_В) = \dfrac{n-1}{n} \cdot D_Г$.

Из утверждения 3 следует, что $D_В$ является смещенной т.с.о. для $D_Г$. Для получения несмещенной т.с.о. $D_Г$ рассматривают исправленную дисперсию: $S^2 = \dfrac{n-1}{n} \cdot D_В$.

Утв4: Исправленная дисперсия является несмещенной т.с.о. для $D_Г$, т.е. $M(S^2) = D_Г$.

На практике S^2 пользуются при небольших обьемах выборки (n < 30).

Утв5: Исправленная СКО является несмещенной т.с.о. для генеральной СКО, т.е справедливо равенство: $M(S) = \sigma_Г$.

Дополнительные характеристики вариационного ряда.

Кроме характеристик, рассмотренных выше, рассматриваются следующие характеристики: мода, медиана, размах варьирования, среднее абсолютное отклонение и коэффициент вариаций.

Опр1: Модой M_0 называют варианту, которая имеет наибольшую частоту.

Опр2: Медианой m_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на 2 части, равные по числу вариант.

Если n = 2k + 1, то $m_e = x_{k+1}$;

n = 2k, то $m_e = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Опр3: Размахом варьирования вариационного ряда называют $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Опр4: Средним абсолютным отклонением вариационного ряда называется среднее арифметическое отклонений вариант от выборочной или генеральной средней:

$$\eta = \frac{\sum n_i \left| x_i - \overline{x_B} \right|}{\sum n_i} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{\sum n_i \left| x_i - \overline{x_Г} \right|}{\sum n_i}.$$

Опр5: Коэффициентом вариаций V называется отношение СКО выборочного или генерального к выборочной или генеральной средней, выраженной в процентах:

$$V_B = \frac{\sigma_B}{\overline{x_B}} \cdot 100\% \quad \text{или} \quad V_Г = \frac{\sigma_Г}{\overline{x_Г}} \cdot 100\%.$$

Интервальные оценки параметров распределения. Их точность и надежность. Доверительные интервалы.

Все оценки неизвестного параметра θ, характеризующего изучаемый признак X ГС, определялись одним числом, т.е. являлись т.с.о. При выборках малого обьема т.с.о. может значительно отличаться от оцениваемого параметра, что приводит к грубым ошибкам. Следовательно, при малых обьемах выборки пользуются интервальными оценками неизвестного параметра.

Опр1: Интервальной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, в котором может оказаться оцениваемый параметр θ.

Опр2: Число $\delta > 0$ называется точностью оценки θ^* параметра θ, если $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$.

Статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка θ^* удовлетворяет неравенству $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$. Можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство выполняется.

Опр3: Надежностью или доверительной вероятностью оценки θ^* параметра θ называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$: $\gamma = P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right)$.

Доверительная вероятность γ обычно задается наперед. Чаще всего γ = 0.95; 0,99; 0,999.

Имеем, $\gamma = P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right) \Leftrightarrow P\left(-\delta < \theta - \theta^* < \delta\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma$.

Опр4: Интервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, который заключает в себе оцениваемый параметр с заданной надежностью γ, называется доверительным интервалом, а его концы – доверительными границами.

Заметим, что доверительный интервал имеет случайные концы, т.к. в разных выборках получаются различные значения θ^*. Т.о., доверительные границы – суть СВ и являются функциями от данных выборок. Тогда, поскольку СВ является неоцениваемый параметр θ, а доверительный интервал, то более правильней говорить не о вероятности попадания θ в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал «покроет» θ.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном СКО σ.

Пусть количественный признак X рассмотренной СВ распределен нормально, причем СКО известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание M(X) = a по выборочной средней $\overline{x_B}$, т.е. найти доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с заданной точностью γ.

Тогда искомый доверительный интервал для a: $\left(\overline{x_B} - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x_B} + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где $t = \phi^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$.

Пример: Количественный признак X имеет нормальное распределение с известной СКО $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\overline{x_B}$, если задана надежность оценки γ = 0,95; n = 36.

Решение:

1) Найдем t исходя из соотношения: $t = \phi^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) = \phi^{-1}(0{,}475) = 1{,}96$.

2) Найдем точность оценки: $\delta = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{6} = 0{,}98$.

3) Искомый доверительный интервал: $\left(\overline{x_B} - 0{,}98; \overline{x_B} + 0{,}98\right)$.

Пусть $\overline{x_B} = 4$, тогда доверительный интервал: (3,02; 4,98).

$P(3{,}02 < a < 4{,}98) = 0{,}95$ - Верно ли это соотношение? **Нет**, т.к. если $a \in (3{,}02; 4{,}98)$, то $P(3{,}02 < a < 4{,}98) = 1$, в противном случае $P(3{,}02 < a < 4{,}98) = 0$.

Т.о., доверительную вероятность не следует связывать с оцениваемым параметром, она связана лишь с границами доверительного интервала, который меняется от выборки к вы-

борке, а смысл, который имеет заданная надежность $\gamma = 0{,}95$ состоит в том, что если произведено достаточное число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, которые покрывают «а», т.е. в них действительно заключен параметр «а» и лишь в 5% случаях а можно выйти за границы доверительного интервала.

1. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном СКО. Доверительные интервалы для оценки СКО нормального распределения.

1. Пользуясь распределением Стьюдента получают следующий доверительный интервал: $\left(\overline{x_B} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x_B} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, покрывающий неизвестный параметр а с заданной точностью γ, где t_γ - коэффициент Стьюдента, который находится по таблице по заданным n и γ.

Доверительные интервалы такого вида используются при оценке истинного значения измеряемой величины, т.е. математического ожидания.

2. Используя распределение χ^2 (хи), получают следующие доверительные интервалы, покрывающие неизвестное СКО σ нормально распределенного признака X с заданной надежностью γ: $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$, если $q < 1$;

$0 < \sigma < s(1+q)$, если $q > 1$, где q находится по специальной таблице по заданному обьему выборки n и надежности γ.

Указанные доверительные интервалы используются при оценке точности измерений.

Тема 4. Элементы теории корреляции.

Виды зависимостей между СВ. Корреляционная зависимость.

Две СВ X и У могут быть

1) независимыми;
2) связанные функциональной зависимостью;
3) связанные статистической зависимостью, частным случаем которой является корреляционная зависимость.

Строгая функциональная зависимость между СВ реализуется редко, т.к. обе Св или одна из них подвержены действию случайных факторов. При этом среди них могут быть и общие для обеих СВ.В этом случае возникает статистическая зависимость.

Опр1: Зависимость между СВ, при которой изменение одной СВ влечет изменение распределения другой СВ, называется статистической.

Опр2: Статистическая зависимость, при которой изменение одной СВ влечет изменение среднего значения другой СВ, называется корреляционной.

Опр3: Условным средним $\overline{y_x}$ называется среднее арифметическое значений СВ У, соответствующих фиксированному значению другой СВ Х = х.

Опр4: Корреляционной зависимостью СВ У от СВ Х называется функциональная зависимость $\overline{y_x} = f(x)$ (1).

Функция f называется регрессией СВ У на Х, (1) – уравнение регрессии СВ У на Х. Графики функции регрессии называются линией регрессии У на Х.

Опр5: Условным средним $\overline{x_y}$ называется среднее арифметическое значений СВ Х, соответствующих фиксированному значению другой СВ У = у.

Опр6: Корреляционной зависимостью СВ Х от СВ У называется функциональная зависимость $\overline{x_y} = \varphi(y)$ (2).

Функция φ называется регрессией СВ Х на У, (2) – уравнение регрессии СВ Х на У. Графики функции регрессии называются линией регрессии Х на У.

Задачи теории корреляции:

1. Установление формы корреляционной связи, т.е. установление видов функции регрессии.

Функция регрессии может быть линейной, квадратичной, показательной и т.д. Если обе функции f и φ - линейные, то корреляцию называют линейной. В противном случае – нелинейной.

В случае линейной корреляции уравнения регрессии имеют вид: $\overline{y_x} = k_1 x + b,\ \overline{x_y} = k_2 y + c$.

2. Оценка силы (тесноты) корреляционной связи.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии по несгруппированным данным.

Пусть количественные признаки Х и У связаны линейной корреляционной зависимостью, тогда обе линии регрессии будут прямыми линиями.

Пусть для нахождения уравнений этих прямых произведено n – независимых наблюдений или испытаний, в результате которых получены n – пар чисел: $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$.

Так как эти пары можно рассматривать как случайную выборку из ГС всех возможных значений СВ (Х, У), то величины и уравнения, найденные по полученным данным, называются выборочными.

Рассмотрим случай, когда различные значения х признака Х и соответствующие им значения у признака У наблюдались по одному разу, тогда, очевидно, группировать полученные данные нет необходимости. Тогда искомые уравнения записываются в виде: $Y = k_1 x + b,\ X = k_2 y + c$.

Опр1: Угловой коэффициент прямой линии регрессии У на Х называется выборочным коэффициентом регрессии (ВКР) У на Х.

$k_1 == \rho_{yx}$, $k_2 == \rho_{xy}$.

Нахождение выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

Пусть количественные признаки Х и У связаны линейной корреляционной зависимостью, тогда обе линии регрессии будут прямыми.

Пусть для нахождения уравнений этих прямых произведено n – независимых наблюдений или испытаний, в результате которых получены n – пар чисел: $(x_1; y_1), (x_2; y_2), .., (x_n; y_n)$.

При большом числе наблюдений одно и то же значение x – первая компонента пары (x; y), может встретиться n_x - раз. Одно и то же значение y может встретиться n_y - раз.

$\sum n_x = \sum n_y = \sum n_{xy} = n$.

Данные наблюдения группируют и записывают в виде корреляционной таблицы.

Пример: (x; y) (10; 0,4) (10; 0,8) (20; 0.6) (20; 0,8) (30; 0,4) (30; 0,6) (40; 0,4) (40; 0,6)

n_{xy} 5 3 2 19 7 10 14 4

$n = \sum n_{xy} = 60$

X y	0,4	0,6	0,8	n_x
10	5	-	3	8
20	-	2	19	21
30	7	6	-	13
40	14	4	-	18
n_y	26	12	22	$\sum n_y = 60$ $\sum n_x = 60$

n_x - сумма частот компонент x при различных значениях вторых компонент в парах (x; y);

n_y - сумма частот компонент y при различных значениях первых компонент в парах (x; y);

Уравнение прямой линии регрессии: $\overline{y_x} = \rho_{yx} x + b$ записывают чаще в другом виде:

$\overline{y_x} - \overline{y_B} = \rho_{yx}(x - \overline{x_B})$ (2) , где $\rho_{yx} = \dfrac{\sum n_{xy} \cdot xy - n \cdot \overline{x_B} \cdot \overline{y_B}}{n \cdot \sigma_B^2(x)}$.

Умножим обе части последнего соотношения на $\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}$, тогда

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n \cdot \overline{x_B} \cdot \overline{y_B}}{n \cdot \sigma(x) \cdot \sigma(y)} = r_B \quad (3)$$ - ВКК.

Из равенства (3) выразим ВКР через ВКК: $\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ (4).

Из равенств (4) и (2) следует, что $\overline{y_x} - \overline{y_B} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x_B})$ (5).

Аналогично рассуждая, приходим к выборочному уравнению прямой линии регрессии X на У:

$\overline{x_y} - \overline{x_B} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_e}(y - \overline{y_B})$ (6).

Уравнения (5) и (6) часто записывают в следующей симметричной форме:

$\frac{\overline{y_x} - \overline{y_B}}{\sigma_y} = r_B \cdot \frac{x - \overline{x_B}}{\sigma_x}$ ($5^{/}$) $\qquad$ $\frac{\overline{x_y} - \overline{x_B}}{\sigma_x} = r_B \cdot \frac{y - \overline{y_B}}{\sigma_y}$ ($6^{/}$)

Из равенства (6) следует, что $\rho_{xy} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ (7).

Свойства ВКК.

По определению $r_B = \frac{\sum n_{xy} \cdot xy - n \cdot \overline{x_B} \cdot \overline{y_B}}{n \cdot \sigma(x) \cdot \sigma(y)}$, где (x; y) – варианты выборки.

ВКК показывает силу или тесноту связи между признаками X и У. Отметим без доказательства соответствующие свойства ВКК:

1) $|r_B| \le 1$.

2) Если $r_B = 0$ и выборочные линии регрессии – прямые, то признаки X и У не связаны линейной корреляционной зависимостью, а может быть связаны нелинейной корреляционной зависимостью или даже функциональной зависимостью.

3) Если $|r_B| = 1$, то наблюденные значения признаков X и У связаны линейной функциональной зависимостью.

4) Если $|r_B|$ возрастает от 0 до 1, корреляционная зависимость становится более тесной, и как следует из свойства (3) при $|r_B| = 1$ переходит в линейную функциональную зависимость.

5) $sign\ r_B = sign\ \rho_{yx} = sign\ \rho_{xy}$.

6) ВКК является средним геометрическим двух ВКР ρ_{yx} и ρ_{xy}. При этом $r_B = \pm\sqrt{\rho_{yx} \cdot \rho_{xy}}$, где знак корня выбирается в соответствии со свойством (5).

Тема 5. Статистическая проверка статистических гипотез.

Опр1: Статистической гипотезой называется предположение о виде неизвестного распределения СВ или о параметрах известных распределений СВ.

Пример: H_1: «Изучаемая ГС распределена по закону Пуассона».

H_2: «Циклон «Изабель» накроет Канаду».

Опр2: Выдвинутую первоначально гипотезу называют основной или нулевой. *Обозначают*: H_0.

Опр3: Гипотезу H_1, которая противоречит нулевой гипотезе H_0, называют конкурирующей или альтернативной гипотезой.

Пример: Пусть H_0: a = 5. Тогда H_1: $a \neq 5$, или $H_1^{/}$: $a > 5$, или $H_1^{//}$: $a < 5$.

Опр4: Гипотеза, содержащая только одно предположение, называется простой гипотезой.

Опр5: Гипотеза, содержащая более одного предположения, называется сложной гипотезой.

Пример: H_0: a = 5 (σ - известно) – простая гипотеза;

H_0: a = 5 (σ - неизвестно) – сложная гипотеза.

Выдвинутая статистическая гипотеза может быть правильной или неправильной. Поэтому возникает необходимость их проверки. Т.к. проверка проводится статистическими методами, то ее называют статистической проверкой.

В итоге статистической проверки выдвинутой гипотезы может быть приняты правильные или неправильные решения. При принятии неверного решения могут быть допущены ошибки двух родов.

Опр6: Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза H_0. Вероятность ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают через α. Чаще всего α = 0,05; α = 0,01.

Опр7: Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза H_0. Вероятность ошибки второго рода обозначается через β.

Очевидно, что правильное решение по итогам статистической проверки может быть принято также в двух случаях:

1) H_0 принимается, причем она и в действительности верна. Вероятность принятия такого решения равна 1 - α.

2) H_0 отвергается и в действительности H_0 неверна. Вероятность принятия такого решения равна 1 - β.

Для проверки выдвинутой гипотезы H_0 используют специально подобранную СВ, распределение которой известно. Обозначим в общем случае эту СВ через К.

Опр1: СВ К, которая служит для проверки выдвинутой гипотезы, называется статистическим критерием или просто критерием.

Опр2: Значение критерия К, которое вычислено по произвольной выборке, называется наблюденным или эмпирическим значением и обозначается $K_{набл}$ или $K_{эмп}$.

После выборки определенного критерия К множество всех его возможных значений разбивает на 2 непересекающихся подмножества: одно из них содержит значение критерия, при котором H_0 принимается, а другое содержит значение критерия, при котором H_0 отвергается.

Опр3: Совокупность значений критерия К, при котором H_0 принимается, называют областью принятия гипотезы (ОПГ).

Опр4: Совокупность значений критерия К, при котором H_0 отвергается, называется КО.

Основные принципы проверки статистических гипотез состоят в следующем:

Если $K_{набл} \in$ КО, тогда H_0 отвергают; если $K_{набл} \in$ ОПГ, тогда H_0 принимают (чаще говорят, нет оснований отвергнуть H_0).

Опр5: Точки, отделяющие КО от ОПГ, называются критическими и обозначаются $k_{кр}$.

Опр6: КО, определяемая неравенством $K > k_{кр}$, называется правосторонней КО или ПКО.

ЛКО: $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$).

ПКО и ЛКО называются односторонними КО (ОКО).

Опр7: Двусторонней КО называется область, определенная: $\left[\begin{array}{l} K > k'_{кр}, \\ K < k''_{кр} \end{array}\right.$ $k'_{кр} > k''_{кр}$.

Опр8: Если $k'_{кр} = k''_{кр} == k_{кр}$, то ДКО имеет симметричный вид: $\left[\begin{array}{l} k > k_{кр}, \\ k < k_{кр} \end{array}\right.$.

Итак, для ПКО ОПГ: $K > k_{кр}$;

ЛКО ОПГ: $K < k_{кр}$;

ДКО ОПГ: $k''_{кр} < K < k'_{кр}$;

ОПГ: $(k_{кр}; k_{кр})$

Нахождение критических областей и критических точек. Мощность критерия.

1. Нахождение ПКО.

Так как ПКО определяется соотношением $K > k_{кр}$, то для нахождения ПКО достаточно найти КО $k_{кр}$, а ее ищут исходя из требования, чтобы при условии справедливости выдвинутой гипотезы H_0 вероятность того, что критерий $K > k_{кр}$ будет равен принятому уровню значимости.

$P(K > k_{кр}) = \alpha$ (1)

Для каждого критерия имеется соответствующая таблица, по которой и находят $k_{кр}$, удовлетворяющий (1). После нахождения $k_{кр}$ вычисляют по данным испытаний или наблюдений $K_{набл}$. Тогда, если

1) $K_{набл} > k_{кр}$, то H_0 отвергают (т.к. $K_{набл}$ попадает в ПКО);

2) $K_{набл} < k_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

2. Нахождение ЛКО.

Так как ЛКО определяется соотношением $K < k_{кр}$, то для нахождения ЛКО достаточно найти КО $k_{кр}$, а ее ищут исходя из требования, чтобы при условии справедливости выдвинутой гипотезы H_0 вероятность того, что критерий $K < k_{кр}$ будет равен принятому уровню значимости.

$P(K < k_{кр}) = \alpha$ (2)

Найдя по соответствующей таблице $k_{кр}$, вычисляют $K_{набл}$. Тогда, если:

1) $K_{набл} < k_{кр}$, то H_0 отвергают (т.к. $K_{набл}$ попадает в ЛКО);

2) $K_{набл} > k_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0 (т.к. $K_{набл} \in$ ОПГ).

3. Нахождение ДКО.

Так как ДКО определяется соотношением $k_{кр}^{//} < K < k_{кр}^{/}$, то для ее отыскания найдем $k_{кр}^{/}$ и $k_{кр}^{//}$, а их находят исходя из требования, чтобы при условии справедливости выдвинутой гипотезы H_0 сумма вероятностей того, что критерий $K < k_{кр}^{/}$ и $K > k_{кр}^{//}$, будет равна принятому уровню значимости, т.е. $P(K < k_{кр}^{/}) + P(K > k_{кр}^{//}) = \alpha$ (3).

Исходя из этого требования находят $k_{кр}^{/}$ и $k_{кр}^{//}$ и затем вычисляют $K_{набл}$. Тогда, если

1) $(K_{набл} > k_{кр}^{//}) \wedge (K_{набл} < k_{кр}^{/})$, то H_0 отвергают (т.к. $K_{набл}$ попадает в ДКО);

2) $K_{набл} \in (k_{кр}^{//}; k_{кр}^{/})$, то нет оснований отвергнуть H_0 (т.к. $K_{набл} \in$ ОПГ).

В частном случае, когда ДКО является симметричным множеством, тогда требование (3) равносильно $P(K > k_{кр}) = \frac{\alpha}{2}$. Из этого требования находится $k_{кр}$. Далее находят $K_{набл}$. Тогда, если:

1) $|K_{набл}| > k_{кр}$, то H_0 отвергают (т.к. $K_{набл}$ попадает в ДКО);

2) $|K_{набл}| < k_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0 (т.к. $K_{набл} \in$ ОПГ).

Во всех случаях, рассмотренных выше, КО находилась исходя из требования, что вероятность попадания в него критерия К равна принятому уровню значимости (при условии, что H_0 справедлива).

Кроме уровня значимости для характеристики критерия К рассматривается мощность критерия.

Опр.: Мощностью критерия К называется вероятность попадания его в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Другими словами, мощность К есть вероятность того, что H_0 будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Тогда очевидно, что мощность К равна разности $1-\beta$, где β - вероятность ошибки 2-о рода.

Т.о., чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки 2 – го рода.

Итак, если уровень значимости α уже выбран, то КО следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Очевидно, что чем меньше α и β, тем точнее определена КО.

Сравнение двух генеральных средних нормальных ГС, дисперсии которых известны.

Пусть ГС Х и У распределены нормально, причем их дисперсии известны $D(X)$ и $D(Y)$. Пусть по независимым выборкам обьемов n и m, извлеченным из ГС найдены выборочные средние $\overline{x_B}$ и $\overline{y_B}$. Требуется по этим выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить гипотезу $H_0 : \overline{x_Г} = \overline{y_Г}$.

КО при решении поставленной задачи находится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Возможны следующие случаи:

1. $H_0 : M(X) = M(У)$,

$H_1 : M(X) \neq M(У)$.

2. $H_0 : M(X) = M(У)$,

$H_1 : M(X) > M(У)$.

3. $H_0 : M(X) = M(У)$,

$H_1 : M(X) < M(У)$.

1. Правило для проверки выдвинутой гипотезы:

1) Находим $z_{кр}$ по формуле: $z_{кр} = \phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$;

2) Находим $Z_{набл} = \frac{\overline{x_Г} - \overline{y_Г}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$;

3) Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

4) Если $|Z_{набл}| > z_{кр}$, то H_0 отвергают.

2. Правило для проверки выдвинутой гипотезы:

1) Находим $z_{кр}$ по формуле: $z_{кр} = \phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$;

2) Находим $Z_{набл} = \frac{\overline{x_Г} - \overline{y_Г}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$;

3) Если $Z_{набл} < z_{кр}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

4) Если $Z_{набл} > z_{кр}$, то H_0 отвергают.

3. Правило для проверки выдвинутой гипотезы:

1) Находим $z_{кр}^{/}$ по формуле: $z_{кр}^{/} = -z_{кр} = \phi^{-1}\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)$;

2) Находим $Z_{набл} = \frac{\overline{x_Г} - \overline{y_Г}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$;

3) Если $Z_{набл} < z_{кр}^{/}$, то H_0 отвергаем.

4) Если $Z_{набл} > z_{кр}^{/}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

Основная литература:

1. Барашков А.С. Математика. – М.:АСТ: СЛОВО; Владимир: ВКТ, 2011

2. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : Учебник для вузов по экон. специальностям / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 458 с.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : Учебное пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2010. – 404 с.

4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата. Учебник (Грф МО РФ) – М: Инфра-М, 2011.

5. Макаров С.И. Математика для экономистов [Электронный ресурс]: электронный учебник. – 2-е изд., стереотип. – М.: КноРус, 2009 (1CD-ROM).

6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник/ Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2011.

Дополнительная литература:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высшая школа, 2004.–304 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2. – М.: Высшая школа, 2004. –416 с.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2005.
4. Сборник задач по высшей математике для экономистов : Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.
5. Вержбицкий В.М. Вычислительная линейная алгебра. (Гриф МО) – М.: Высшая школа, 2009.
6. Клюшкин В.М. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие для вузов (Гриф МО РФ). – М.: Инфра-М, 2009.
7. Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты. - М: Магистр. ИНФРА-М, 2011.
8.ЕрмаковаВ.И. Общий курс высшей математики для экономистов.– М.: ИНФРА-М, 2007.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Случайные события, их виды. Операции над случайными событиями, примеры.

2. Сочетания и размещения без повторений, примеры решений комбинаторных задач.

3. Перестановки с повторениями и без повторений, примеры решений комбинаторных задач.

4. Сочетания и размещения с повторениями, примеры решений комбинаторных задач.

5. Классический подход к понятию вероятности случайного события, примеры подсчета вероятности.

6. Статистической определение вероятности случайного события, свойства вероятности.

7. Теорема сложения вероятностей для несовместных и совместных событий, примеры.

8. Зависимые и независимые события, условная вероятность, примеры вычисления.

9. Формула полной вероятности, промеры использования.

10. Формула Байеса, примеры использования.

11. Схема Бернулли, формула Бернулли, пример ее применения.

12. Асимптотические формулы вычисления вероятности события, примеры (локальная теорема Лапласа, формула Пуассона, формула Бернулли).

13. Дискретные случайные величины, ряд распределения, пример расчета ряда.

14. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства, пример вычисления.

15. Дисперсия дискретной случайной величины, ее смысл, вычисление и свойства.

16. Непрерывные случайные величины, функция распределения, ее свойства, пример построения графика.

17. Плотность распределения непрерывной случайной величины, ее связь с функцией распределения. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины, пример нахождения.

18. Биноминальное распределение случайной величины, пример.

19. Распределение Пуассона случайной величины, пример.

20. Равномерное распределение, понятие, свойства, пример.

21. Показательное распределение, понятие, свойства, пример.

22. Нормальный закон распределения, его параметры, график и свойства.

23. Стандартное нормальное распределение, его параметры, график, свойства и примеры применения.

24.Генеральная совокупность и выборка, способы ее записи. Репрезентативность выборки.

25.Графическое изображение выборочных данных, примеры.

26.Выборочная и теоретическая функции распределения, выборочная плотность распределения.

27.Числовые характеристики выборки (среднее арифметическое и его свойства, пример вычисления).

28.Числовые характеристики выборки (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства, пример вычисления).

29.Точечные оценки числовых характеристик случайной величины и их свойства.

30.Выборочное среднее и оценка математического ожидания.

31.Выборочная дисперсия и оценка генеральной дисперсии.

32.Интервальное оценивание параметров распределения. Доверительный интервал для генеральной средней случайной нормально распределенной величины.

33.Доверительный интервал для генеральной дисперсии случайной нормально распределенной величины.

34.Корреляционная связь между переменными, ее виды, примеры.

35.Парная линейная регрессия, ее уравнение, пример вычисления.

36.Коэффициенты корреляции двух величин (коэффициент Пирсона, его вычисление, пример).

37.Коэффициенты корреляции двух случайных величин (коэффициент Спирмена, его вычисление, пример).

38.Статистические прогнозы, их классификация, примеры. Общая схема проверки статистических гипотез.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
для студентов групп: ЭЗ - 21, ЭЗ – 21С

Теория

Задание № 1. Составить краткий конспект по теме, номер которой в списке вопросов к экзамену, соответствует **остатку от деления** номера зачётной книжки на количество вопросов (60) Например, 137:60 = 2 (ост **17**), т.е. вопрос 17. В конспекте нужно представить теоретический материал по теме и **не менее 2** примеров и (или) контрпримеров, при необходимости сделать чертежи.

Практика

Задание № 2, 3, 4. (Комбинаторика, теория вероятностей). Данные задания выполняются по вариантам. Номер варианта соответствует **остатку от деления** номера зачётной книжки на количество вариантов (14). Например, 137:14 = 9 (ост **11**), т.е. номер варианта – 11. При вычислениях на калькуляторе (для особо одарённых) лучше вычитать из номера зачётной книжки число 14 до тех пор, пока не получится число меньше 14. Это и будет номер варианта. ☺

ВАРИАНТ 1.

ЗАДАНИЕ 2

1. Ребенок, играя десятью кубиками, на которых написаны буквы М, М, Т, Т, А, А, А, К, И, Е, сложил слово «МАТЕМАТИКА». Можно ли считать, что ребенок грамотный? (Какова вероятность?)
2. Из колоды 36 карт наудачу берутся четыре карты. Найти вероятность появления хотя бы одного короля.
3. В трех ящиках находится по десять деталей: в первом 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что две из трех извлеченных деталей стандартные?
4. В урне пять белых и четыре черных шара. Из урны извлекают по одному шару без возвращения в урну. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится белый, а при втором - черный шар.
5. Из отрезка [0;2] наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$

ЗАДАНИЕ 3

1. Имеется три одинаковые урны. В первой - шесть белых и восемь черных шаров, во второй - девять белых и десять черных шаров, в третьей - только белые шары. Наугад из одной из урн вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.
2. Решить предыдущую задачу при условии, что вынутый наугад шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из первой урны.
3. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не менее двух раз.
4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 120 раз в 144 испытаниях.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми. X - число мальчиков в семье, имеющей пять детей.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,1 M(X)=3,9 D(X)=0,09
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P ($\alpha < X < \beta$). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ x^2, & \text{при } 0\le x\le 1,\ \alpha=-1,\ \beta=0{,}5\\ 1, & \text{при } x>1\end{cases}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=1, β=8, a= 8, b= 15.

5. Решить задачу: Срок службы прибора представляет собой случайную величину, имеющую нормальное распределение, с гарантией на 15 лет и средним квадратичным отклонением, равным 3 годам. Какова вероятность того, что три таких прибора прослужат от 10 до 20 лет?

Вариант 2.

ЗАДАНИЕ 2

1. С площади уезжают четыре автомобиля, причем каждый из них может с равной вероятностью поехать по любой из четырех улиц, начинающихся от этой площади. Какова вероятность того, что: a) все авто поедут по одной и той же улице? b) по каждой из улиц поедет автомобиль?

2. Из колоды 54 карты наугад берутся четыре карты. Найти вероятность появления хотя бы одного туза.

3. Найти вероятность совместного появления двух гербов и решки при одном бросании трех монет.

4. У сборщика имеется три конусных и семь эллиптических валиков. Сборщик наугад взял один валик, затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков - конусный, а второй - эллиптический.

5. В квадрат с вершинами в точках O(0;0), A(1;0), B(1;1), C(0;1) наудачу брошена точка M(x;y). Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству y < 2x ?

ЗАДАНИЕ 3

1. Имеется две урны. В первой - шесть белых и три черных шара, во второй - семь белых и два черных шара. Из первой урны во вторую перекладывают один шар. После этого из второй урны наугад извлекают один шар. Найти вероятность того, что шар этот окажется белым.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что вынутый из второй урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую переложили черный шар.

3. Вероятность того, что зерно не взойдет, равна 0,002. Найти вероятность того, что из 1000 зерен не взойдет ровно пять.

4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится не менее 70 раз и не более 80.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. X - число выстрелов.

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,3 M(X)=3,7 D(X)=0,21

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ x^3, & \text{при } 0\le x\le 1,\ \alpha=0{,}3,\ \beta=2\\ 1, & \text{при } x>1\end{cases}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=2, β=8, a= 3, b= 12.

5. Решить задачу: Вес мотка пряжи - случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием 100 г. Найти ее дисперсию, если отклонение веса мотка от среднего, превышающее 10 г, происходит с вероятностью 0,05.

Вариант 3

ЗАДАНИЕ 2

1. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 волейбольных команд они разбиты на две подгруппы (по 8 команд в каждой). Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: a) в разных подгруппах? b) в одной подгруппе?

2. Из колоды 36 карт наугад берутся четыре карты. Найти вероятность появления хотя бы одной дамы.

3. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей сумма выпавших очков будет равна шести.

4. В урне семь белых и три черных шара. Наугад извлекается сначала один шар без возвращения, затем второй. Найти вероятность того, что вторым будет извлечен черный шар.

5. На отрезок AB длиной 12 см наугад ставят точку M. Найти вероятность того, что площадь квадрата, построенного на отрезке AM, будет заключена между 36 см^2 и 81 см^2.

ЗАДАНИЕ 3

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму: для лыжника — 0,9, для велосипедиста — 0,8 и ля бегуна — 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что выбранный спортсмен выполнил норму. Найти вероятность того, что это был лыжник.

3. Найти вероятность того, что событие появится не менее трех раз в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события в одном испытании равна 0,8.

4. Найти вероятность того, что событие наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в одном испытании равна 0,6.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Игральная кость брошена 4 раза.. X — число появлений шестёрки.

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,5 M(X)=3,5 D(X)=0,25

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<1;\\ \dfrac{x^2-x}{2}, \text{при } 1\le x\le 2,\ \alpha=0{,}5,\ \ \beta=1{,}5\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=3, β=7, a= 5, b= 10.

5. Решить задачу: Процент содержания крахмала в картофеле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 18% и средним квадратическим отклонением 3%. Какова вероятность того, что обе наудачу взятые картофелины содержат от 16% до 22% крахмала?

Вариант 4.

ЗАДАНИЕ 2

1. Вы справляете свой день рождения с 10 друзьями. Какова вероятность того, что хотя бы у двух из них дни рождения совпадают? (годы рождения могут не совпадать). Какова вероятность того, что дни рождения ваших друзей придутся на разные месяцы года?

2. Из колоды 54 карты наугад берутся четыре карты. Найти вероятность появления хотя бы одного валета.

3. Имеется два ящика, содержащие по 10 деталей: в первом 7, во втором 8 стандартных. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что обе детали будут разными по качеству?

4. В урне семь белых и три черных шара. Наугад извлекается сначала один шар без возвращения в урну, затем второй. Какова вероятность того, что будут извлечены два белых шара?

5. Точка M(a;b) наудачу выбирается из квадрата с вершинами O(0;0), A(1;0), B(1;1), C(0;1). Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2+ ax + b= 0$ окажутся действительными и одного знака.

ЗАДАНИЕ 3

1. В урне лежит шар неизвестного цвета с равной вероятностью: белый или черный. В урну опускается белый шар, и после перемешивания наугад извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что извлеченный из урны шар оказался белым. Найти вероятность того, что в урне остался черный шар.

3. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,2. Испытано девять приборов. Найти вероятность того, что отказал как минимум один прибор.

4. Найти вероятность появления события 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. В урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Шары извлекают по одному без возврата до появления черного шара. X - число извлеченных шаров.

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,9 M(X)=3,1 D(X)=0,09

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<0; \\ 3x^2+2x, \text{при } 0\le x\le \frac{1}{3}, \\ 1, \text{ при } x>\frac{1}{3} \end{cases} \quad \alpha=0{,}25, \quad \beta=1$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=4, β=12, a= 6, b= 15.

5. Решить задачу: Размер детали подчинен нормальному закону с параметрами a = 30 микрон и σ= 5 микрон. Детали считаются годными, если их размер находится в пределах от 20 до 40 микрон. Если размер детали больше 40 микрон, она подлежит переделке. Каково число деталей, подлежащих переделке, из произведенных 1000 деталей?

Вариант 5

ЗАДАНИЕ 2

1. Семь студентов условились ехать в одной электричке, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 7 вагонов.

2. В ящике имеется 12 деталей, из которых 6 стандартных. Найти вероятность того, что среди четырех наугад извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

3. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p_1 = 0,7; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9. Найти вероятность поражения цели при одном залпе из всех орудий.

4. У Кощея бессмертного 100 золотых, 200 серебряных и 1000 медных монет. Он наудачу достаёт по одной три монеты, не возвращая обратно. Найдите вероятность того, что первой окажется золотая монета (событие A), второй — серебряная (событие B), третьей — медная (событие C).

5. Точка M (a;b) наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1; -1), (1; -1), (1; 1), (-1; 1). Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$ окажутся действительными и положительными.

ЗАДАНИЕ 3

1. В пирамиде пять винтовок, три из них с оптическим прицелом. Вероятность поражения цели из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, без такового - 0,7. Найти вероятность того, что цель поражена из наугад выбранной винтовки.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что цель поражена из наугад выбранной винтовки. Найти вероятность того, что эта винтовка без оптического прицела.

3. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,01. Какова вероятность того, что из 500 билетов выиграют ровно три.

4. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 раз.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график.

Буквы слова «ОГОРОД» рассыпаны в беспорядке. Из них наудачу выбирают сразу 4 буквы. X - число букв «О» в выборке.

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,7 M(X)=3,3 D(X)=0,21

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2; \\ \frac{x}{2}-1, & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 3$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=5, β=9, a= 7, b= 11.

5. Решить задачу: Заряд охотничьего пороха отвешивают на весах. Вес заряда — нормально распределенная случайная величина с параметрами a =2,3 г σ = 150 мг. Найти вероятность повреждения ружья при выстреле, если максимально допустимый вес заряда пороха равен 2, 5 г.

Вариант 6

ЗАДАНИЕ 2

1. Игральная кость бросается три раза. Какова вероятность того, что a) ни разу не выпало пять очков; b) каждый раз выпадало одно и тоже число очков; c) все числа выпавших очков оказались различными?

2. В ящике имеется 12 деталей, из которых 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди четырех наугад извлеченных деталей есть хотя бы одна нестандартная.

3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения мишени при одном выстреле для первого стрелка 0,7, для второго - 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

4. На практических занятиях в студенческой группе присутствуют семь юношей и восемь девушек. По номерам из списка наугад отобраны трое студентов для работы у доски. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся юношами.

5. Точка M (a;b) наудачу выбирается из квадрата с вершинами (-1; -1), (1; -1), (1; 1), (-1; 1). Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + ax + b$ = O окажутся действительными и одного знака.

ЗАДАНИЕ 3

1. В ящике 12 деталей, изготовленных заводом №1, 20 - заводом №2, 18 - заводом №3. Вероятности того, что деталь отличного качества при условии, что изготовлена заводом №1, №2, №3, соответственно равны 0,9; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь окажется отличного качества.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что вынутая наугад деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она изготовлена заводом №2.

3. Найти вероятность того, что событие A появится не менее четырех раз в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,7.

4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в серии из 100 испытаний событие появится не менее 70 раз и не более 80 раз.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Стрелок имеет 4 патрона и стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. X— количество использованных патронов.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,9 M(X)=2,2 D(X)=0,36
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P ($\alpha < X < \beta$). Построить графики функций f(x) и F(x).
4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases} \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2$$

a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.
Если α=6, β=10, a= 8, b= 12.
5. Решить задачу: Размер детали - случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами a = 33 микрона и σ= 4 микрона. Деталь считается годной, если ее размер находится в пределах от 20 до 40 микрон. Какова вероятность, что две наудачу взятые детали бракованные?

Вариант 7

ЗАДАНИЕ 2

1. Вы останавливаете на улице наудачу трех человек и выясняете, в какой день недели они родились. Какова вероятность того, что a) все родились в среду; b) ни один не родился в субботу; c) все родились в различные дни недели?
2. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша для владельца одного лотерейного билета?
3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0, 38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0, 8.
4. В урне находятся пять белых, четыре черных и три синих шара. Из урны извлекают по одному шару без возвращения. Какова вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором - черный, при третьем - синий?
5. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых чисел из отрезка [-1; 1] больше нуля, а их произведение отрицательно.

ЗАДАНИЕ 3

1. Имеется три партии деталей, по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20; 15; 10. Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь окажется стандартной.
2. Решить предыдущую задачу при условии, что наугад извлеченная деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она извлечена из первой партии.
3. В урне шесть белых и четыре черных шара. Из урны берут шар, а затем кладут его в урну. Какова вероятность того, что в восьми таких испытаниях будет извлечено ровно три белых шара?
4. Вероятность того, что машинистка сделает ошибку в одном знаке, равна 0,02. Найти вероятность того, что машинистка сделает на листе, содержащем 1800 знаков, ровно две ошибки.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Монета бросается до появления герба, но не более четырех раз. X - число бросаний монеты.

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,6 M(X)=3,4 D(X)=0,24

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -1;\\ \frac{x}{3}+\frac{1}{3}, & \text{при } -1<x\le 2,\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}\quad \alpha=0,\quad \beta=1$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=8, β=15, a= 12, b= 16.

5. Решить задачу: Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределяется по нормальному закону с параметрами a = 5 см и σ = 0,9 см. Найти границы, в которых следует ожидать размер диаметра детали, при условии, что вероятность не выхода за эти границы была равна 0,95.

Вариант 8

ЗАДАНИЕ 2

1. Найти вероятность того, что последняя цифра квадрата или четвертой степени произвольного целого числа окажется единицей.

2. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди трех наугад извлеченных деталей есть хотя бы одна нестандартная.

3. Вероятность поражения цели при одном выстреле для одного стрелка 0, 6, для второго - 0, 7. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

4. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наугад по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5.

5. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. (Вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно круга).

ЗАДАНИЕ 3

1. Число грузовых машин относится к числу легковых автомашин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, а легковая - 0,2. Найти вероятность того, что наугад выбранная машина будет заправляться.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что наугад выбранная машина будет заправляться. Найти вероятность того, что эта машина - грузовая.

3. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0,0005. Найти вероятность того, что откажет ровно два элемента.

4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в 100 испытаниях.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Игральная кость бросается 4 раза. X - число появлений числа очков, кратного трем.

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,4 M(X)=3,6 D(X)=0,24

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P ($\alpha < X < \beta$). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 2; \\ \frac{x}{2} - 1, \text{при } 2 < x \le 4, \ \alpha = 2, \ \beta = 3 \\ 1, \text{ при } x > 4 \end{cases}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:

a) равномерно на отрезке [a; b]

b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;

c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.

Если α=9, β=14, a= 10, b= 15.

5. Решить задачу: Рост женщин из некоторой совокупности является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с параметрами a = 170см и σ = 6 см. Какова вероятность того, что хотя бы одна из наудачу выбранных четырех женщин будет иметь рост от 168 от 172 см?

Вариант 9

ЗАДАНИЕ 2

1. Наудачу набирается семизначный телефонный номер. Какова вероятность того, что a) все цифры номера различны; b) номер начинается с цифры 2; c) все цифры номера нечетные?

2. В ящике 10 деталей, среди которых три стандартные. Найти вероятность того, что среди шести наугад отобранных деталей не более двух нестандартных.

3. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0, 9. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий одно стандартное и два нестандартных.

4. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наугад по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что извлеченные шары будут иметь номера 1, 2, 3 независимо от того, в какой последовательности они появились.

5. На окружности радиуса R зафиксирована точка A. Какова вероятность того, что случайно выбранная точка на окружности отстоит от точки A меньше, чем на R?

ЗАДАНИЕ 3

1. В двух урнах находится по четыре черных и по шесть белых шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар. После чего из второй наугад извлекают шар. Найти вероятность того, что он черный.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что шар, извлеченный из второй урны, оказался черным. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен белый шар.

3. С завода на базу перевезено 1000 сервизов. Вероятность того, что при перевозке сервиз будет разбит равна 0,002. Найти вероятность того, что при перевозке будет разбито ровно три сервиза.
4. Монета брошена 1250 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 625 раз.

ЗАДАНИЕ 4
1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. В соревнованиях участвуют три спортсмена. Вероятности выигрыша для них равны соответственно: 0,4; 0,7; 0,8. X - число выигравших спортсменов.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,2 M(X)=3,8 D(X)=0,16
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le -1; \\ \frac{3x}{4}+\frac{3}{4}, \text{при } -1 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1, \text{ при } x > \frac{1}{3} \end{cases} \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:
a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.
Если α=10, β=16, a= 11, b= 20.
5. Решить задачу: Рост мужчин из некоторой совокупности является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с параметрами a = 176см и σ = 8 см. Какова вероятность того, что двое наудачу выбранных мужчин имеют рост выше 172 см?

Вариант 10

ЗАДАНИЕ 2
1. Группа студентов из 10 юношей и 10 девушек делится случайно на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что в каждой подгруппе число юношей и девушек одинаково?
2. Вероятность попадания стрелков в «десятку» равна 0,1, в «девятку» - 0,3; вероятность выбить восемь или меньше очков равна 0, 6. Найти вероятность того, что при одном выстреле будет выбито не менее девяти очков.
3. Вероятность того, что при аварии сработает только один из двух независимо работающих сигнализаторов, равна 0,14. Известно, что надежность одного сигнализатора равна 0,9. Найти надежность другого сигнализатора.
4. В урне пять белых, четыре черных и три синих шара. Из урны по одному извлекают три шара без возвращения. Какова вероятность того, что при первом извлечении появится синий шар, при втором - черный и при третьем снова синий?
5. В шар вписан куб. Точка наудачу бросается в шар. Какова вероятность того, что точка попадет в куб?

ЗАДАНИЕ 3
1. Имеется две партии изделий по 10 и 12 штук, причем в каждой партии по одному бракованному изделию. Из первой партии во вторую переложено одно изделие. После чего из второй партии наугад извлечено изделие. Найти вероятность того, что оно бракованное.

2. Решить предыдущую задачу при условии, что извлеченное из второй партии изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что из первой партии во вторую переложили бракованное изделие.
3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном испытании равна 0,1. Найти вероятность отказа не более двух элементов.
4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

ЗАДАНИЕ 4
1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,9; 0,7; 0,6. Каждый стрелок произвел по одному выстрелу. X - число происшедших при этом попаданий в цель.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,3 M(X)=2,6 D(X)=0,84
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{при } 0<x\le 4,\\ 1, & \text{при } x>4\end{cases}\quad \alpha=3,\quad \beta=6$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:
a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.
Если α=11, β=17, a= 12, b= 20.
5. Решить задачу: Производится стрельба по полосе шириной 20 м с прицеливанием по ее средней линии. Отклонение от средней линии - нормально распределенная случайная величина с средним квадратическим отклонением. 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при трех выстрелах.

Вариант 11

ЗАДАНИЕ 2
1. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены на российских телевизионных заводах. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад кинескопов окажется три импортных кинескопа.
2. Вероятность попадания стрелков в «десятку» равна 0,1, в «девятку» - 0,3; вероятность выбить восемь или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле будет выбито менее десяти очков.
3. Вероятность допущения ошибки, превышающей заданную точность при одном измерении некоторой величины, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.
4. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Из ящика извлекается четыре детали по одной без возвращения. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится окрашенная деталь, а остальные три будут неокрашенными.
5. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника. (Вероятность попадания

точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от её расположения относительно круга).

ЗАДАНИЕ 3

1. В двух коробках лежит соответственно 20 и 25 игрушек, причем в каждой коробке по одному мячу. Игрушка, взятая из первой коробки, перекладывается во вторую, после чего из второй коробки берется игрушка. Определить вероятность того, что эта игрушка - мяч.
2. Решить предыдущую задачу при условии, что игрушка, вынутая из второй коробки, - мяч. Найти вероятность того, что из первой коробки во вторую переложили тоже мяч.
3. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Устройство отказывает, если не работает два и более элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы устройства.
4. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. X - число опробываний при открывании замка при условии, что испробованный ключ в последующих пробах не участвует.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,5 M(X)=1,5 D(X)=0,25
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{при } 0<x\le 5, \\ 1, & \text{при } x>5 \end{cases} \quad \alpha=4, \quad \beta=7$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:
a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.
Если α=12, β=16, a= 13, b= 20.
5. Решить задачу: Вес изделия распределен по нормальному закону. Известно, что абсолютные отклонения веса изделия от его расчетного веса, превосходящие 150 г, встречаются в среднем 31 раз на 1000 изделий. Найти параметр σ распределения веса изделия.

Вариант 12

ЗАДАНИЕ 2

1. В группе 15 студентов, среди которых пять отличников. Найти вероятность того, что среди семи наугад отобранных студентов три отличника.
2. На полке десять учебников, из них шесть в переплете. Найти вероятность того, что среди трех взятых наугад учебников хотя бы один в переплете.
3. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,6, во втором - 0,7, в третьем - 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике.
4. В урне 12 шаров, из них половина белых. Из урны извлекают три шара по одному без возвращения. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится белый шар, при втором - не белый, при третьем снова белый.

5. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго - два часа.

ЗАДАНИЕ 3

1. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и пять игранных. Для игры наугад выбирается один мяч и после игры возвращается обратно. Затем для второй игры также наугад извлекается мяч. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новым мячом?
2. Решить предыдущую задачу при условии, что вторая игра проведена новым мячом. Найти вероятность того, что первая игра также проведена новым мячом.
3. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,25. Произведено пять выстрелов. Найти вероятность ровно двух попаданий.
4. Вероятность появления события в каждом из 100 испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 70 раз и не более 90 раз.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Вероятность того, что в каждой из четырех городских библиотек необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. X - число библиотек, которые посетит студент.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,8 M(X)=2,2 D(X)=0,16
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1;\\ x-1, & \text{при } 1<x\le 2,\ \alpha=1{,}5,\ \ \beta=10\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:
a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.
Если α=13, β=16, a= 14, b= 18.
5. Решить задачу: Вес рыб, вылавливаемых из пруда, подчинен нормальному закону с параметрами a = 375 г и σ = 25 г. Какова вероятность того, что хотя бы одна из двух выловленных рыб будет иметь вес не менее 300 г?

Вариант 13

ЗАДАНИЕ 2

1. Из 30 студентов 1-го курса факультета физвоспитания 12 человек занимаются баскетболом, 15 - волейболом, 5 - волейболом и баскетболом, а остальные - лыжами. Какова вероятность того, что наудачу выбранные два студента занимаются только волейболом или только лыжами?
2. На полке двенадцать учебников, из них пять в переплете. Найти вероятность того, что среди четырех взятых наугад учебников хотя бы один без переплета.

3. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,6, во втором - 0,7, в третьем - 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится только в двух справочниках.
4. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июне равно пяти. Найти вероятность того, что первого и второго июня будет ясная погода.
5. На отрезке [AB], |AB| = L наудачу поставлены две точки N и M. Найти вероятность того, что точка N будет ближе к точке M, чем к точке A.

ЗАДАНИЕ 3
1. Имеется две вычислительные машины. Вероятность выхода из строя первой машины равна 0,05, второй - 0,2. Расчет производится на наугад выбранной машине. Найти вероятность того, что при расчете машина выйдет из строя.
2. Решить предыдущую задачу при условии, что машина, выбранная для расчета, вышла из строя. Найти вероятность того, что это была первая машина.
3. Устройство состоит из восьми независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого равна 0,2. Найти вероятность отказа не менее двух элементов.
4. Вероятность появления события в каждом из 300 испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие появится 80 раз.

ЗАДАНИЕ 4
1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Из 25 контрольных работ, среди которых пять оценены на «отлично», наугад извлекают три работы. X - число работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,7 M(X)=3,6 D(X)=0,84
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{x^3}{8}, & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}\quad \alpha=1{,}5 \quad \beta=9$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:
a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α.
Если α=14, β=17, a= 15, b= 20.
5. Решить задачу: Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами a = 0 и σ = 2. Найти интервал (α;β), в котором X принимает свои возможные значения с вероятностью 0,61, если α= - β.

Вариант 14

ЗАДАНИЕ 2
1. Найти вероятность того, что среди трех выбранных наугад цифр: a) все одинаковые; b) две одинаковые; c) все разные?
2. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наугад взял три детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена?
3. Вероятность того, что наугад взятое изделие из партии изделий окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

4. В цехе работают 10 мужчин и 7 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.
5. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 3 и 9 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадёт также и в кольцо, образованное построенными окружностями. (Вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от её расположения).

ЗАДАНИЕ 3

1. Прибор работает в двух режимах: в нормальном и в условиях перегрузки. Нормальный режим осуществляется в 80% времени, условия перегрузки - в 20%. Вероятность выхода прибора из строя равна 0,1 в нормальных условиях и 0,6 - в условиях перегрузки. Найти вероятность выхода прибора из строя при произвольном режиме.
2. Решить предыдущую задачу при условии, что прибор вышел из строя. Найти вероятность того, что это произошло в условиях перегрузки.
3. В партии 10% нестандартных деталей. Найти вероятность того, что среди четырех отобранных деталей две нестандартные.
4. Вероятность появления события в каждом из 100 испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз.

ЗАДАНИЕ 4

1. Найти закон распределения случайной величины X. Вычислить M(X) и D(X). Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины X и построить ее график. Имеются 7 билетов в театр, четыре из которых на места первого ряда. Наудачу берут три билета. X - число билетов первого ряда, оказавшихся в выборке.
2. Дискретная случайная величина X может принимать только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины. P_1=0,1 M(X)=2,8 D(X)=0,36
3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти плотность вероятности f(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X) непрерывной случайной величины X и P (α< X < β). Построить графики функций f(x) и F(x).

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 1; \\ \dfrac{x-1}{2}, \text{при } 1 < x \le 3, \ \alpha = -1, \ \beta = 2 \\ 1, \text{ при } x > 3 \end{cases}$$

4. Найти вероятность попадания случайной величины X в замкнутый интервал [α; β], если она распределена:
a) равномерно на отрезке [a; b]
b)по показательному закону и имеет математическое ожидание M(X) = b;
c) по нормальному закону, при этом M (X) = a; σ(X) = α. Если α=15, β=18, a= 16, b= 19.
5. Решить задачу: При измерении детали ее длина X является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с параметрами a = 22 см и σ= 0,2 см. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает X.