1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данная методическая разработка предназначена для студентов заочного отделения экономического факультета. В ней содержатся основные теоретические сведения с образцами решения типовых заданий, список необходимой литературы, примерный перечень вопросов к экзамену, а также варианты контрольных работ.

Курс математического анализа – один из базовых курсов, на которые сегодня опираются общепрофессиональные дисциплины и дисциплины специализации. Математические науки играют огромную роль в образовании современного высококлассного специалиста в технических областях, предоставляя ему аппарат исследования, дисциплинируя, приучая к строгим логическим рассуждениям. Поскольку язык и методы математики широко используются при современном преподавании всех естественнонаучных и технических дисциплин, математика изучается с первого семестра в любом высшем техническом учебном заведении, и на неё выделяется значительная часть бюджета времени студента.

Математический анализ занимает ведущее место среди всех математических дисциплин, изучаемых в технических институтах. Это связано, во-первых, с широким кругом вопросов, охватываемых этой дисциплиной, во-вторых, с тесной связью её практически со всеми изучаемыми в высшей школе предметами математического цикла и с некоторыми другими естественнонаучными дисциплинами.

Курс математического анализа содержит в себе следующие основные части: элементы теории множеств, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и нескольких переменных, а также теорию рядов. Цель читаемого курса – дать студентам абстрактные понятия математического анализа, такие как функция, предел функции, бесконечно малая и бесконечно большая величина, производная и дифференциал функции, определенный интеграл, используемые для описания и моделирования различных по своей природе математических задач; дать представление о дифференциальных

уравнениях и методах их решения; привить студентам навыки использования аналитических методов в практической деятельности; показать студентам универсальный характер основных понятий математического анализа для получения комплексного представления о подходах к созданию математических моделей технических систем и объектов.

Изучение учебной дисциплины «Математический анализ» предполагает овладение материалами лекций, учебной литературы, творческую работу студентов в ходе проведения практических и интерактивных занятий, а также систематическое выполнение заданий для самостоятельной работы студентов. Чтение лекций по данной дисциплине проводится традиционным способом. В ходе лекций раскрываются основные вопросы в рамках рассматриваемой темы, делаются акценты на наиболее сложные и интересные положения изучаемого материала, которые должны быть приняты студентами во внимание. Материалы лекций являются основой для подготовки студента к практическим и интерактивным занятиям.

Студентам предоставляется возможность для самоподготовки и подготовки к экзамену использовать электронный вариант конспекта лекций, подготовленный преподавателем в соответствие с планом лекций. При работе используется диалоговая форма ведения лекций с постановкой и решением проблемных задач, обсуждением дискуссионных моментов и т.д.

При проведении практических занятий создаются условия для максимально самостоятельного выполнения заданий. Поэтому при проведении практического занятия преподавателю рекомендуется:

1. Провести экспресс-опрос (устно или в тестовой форме) по теоретическому материалу, необходимому для выполнения работы (с оценкой).
2. Проверить правильность выполнения заданий, подготовленных студентом дома (с оценкой).

Любой практическое занятие включает самостоятельную проработку теоретического материала и изучение методики решения типичных задач. Некоторые задачи содержат элементы научных исследований, которые мо-

гут потребовать углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

Для успешной подготовки устных сообщений на практических занятиях, кроме рекомендуемой к изучению литературы, должны использовать публикации по изучаемой теме в журналах «Математический анализ», «Вычислительная математика. Математическая кибернетика». Предусмотрено проведение индивидуальной работы (консультаций) со студентами в ходе изучения материала данной дисциплины.

При организации внеаудиторной самостоятельной работы по данной дисциплине преподавателю рекомендуется использовать следующие ее формы: решение студентом самостоятельных задач обычной сложности, направленных на закрепление знаний и умений; выполнение индивидуальных заданий повышенной сложности, направленных на развитие у студентов научного мышления и инициативы.

По окончании изучения дисциплины студенты должны иметь чёткое представление об основных методах исследования свойств функций методами дифференциального и интегрального исследования. Они должны знать основные определения, теоремы и формулы математического анализа и уметь их применять к решению практических задач, в том числе, решаемых с помощью ЭВМ.

Согласно учебным планам для студентов предусмотрена контрольная работа. Выполнять работу следует на обычной ученической тетради в клеточку, и сдать на проверку до экзамена.

Своевременно и верно выполненная работа – необходимое условие сдачи экзамена по предмету. Выполненная не до конца, или содержащая ошибки контрольная работа не зачитывается, и возвращается студенту для повторного выполнения. Кроме того, на экзамене преподаватель может использовать контрольную работу для собеседования со студентом и задать по ней ряд вопросов. Поэтому студент, являясь на экзамен должен иметь при себе зачтенную контрольную работу.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Математический анализ» входит в базовую часть математического цикла подготовки бакалавра по направлению «Экономика». Логическая и содержательно – методическая взаимосвязь с другими дисциплинами и частями ООП выражается в следующем.

Дисциплине «Математический анализ» предшествует общематематическая подготовка в объеме средней общеобразовательной школы или технического колледжа. Освоение данной дисциплины как предшествующей необходимо при изучении следующих дисциплин:

- Линейная алгебра
- Теория вероятностей и математическая статистика;
- Теория игр;
- Эконометрика;
- Методы моделирования и прогнозирования экономики.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Математический анализ»

– способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

– способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);

– способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

– способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

– способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

– способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6).

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать*:*

- язык описания отношений, функций, специальные виды отношений:
- основные понятия и свойства функций от одной и нескольких переменных;
- основные принципы аксиоматического построения математических теорий;
- теорию пределов последовательностей;
- предел функции, непрерывность;
- основы дифференциального исчисления;
- методы исследования функций;
- основы интегрального исчисления;
- теорию числовых рядов;
- классификацию дифференциальных уравнений;
- методы решения дифференциальных уравнений;
- компьютерные методы решения задач математического анализа;

уметь*:*

- формально описывать отношения между объектами и функции от них;
- производить анализ и построение графиков функций;
- применять понятия и факты линейной алгебры при исследовании геометрических объектов;
- находить пределы последовательностей и функции;
- находить пределы функций и исследовать их на непрерывность;
- находить производные функций различного вида;
- исследовать форму кривых методами дифференциального исчисления;
- вычислять неопределённые и определённые интегралы;

- разлагать функции в степенные ряды;

- исследовать области сходимости рядов;

- решать обыкновенные дифференциальные уравнения;

- применять вычислительные методы решения задач математического анализа на компьютере;

владеть навыками*:*

- применения современного математического инструментария для решения экономических и социально-экономических задач;

- методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

быть компетентным:

– выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами;

– в осуществлении сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения поставленных экономических задач;

– в области инструментальных средств для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей;

– в области анализа результатов расчетов и обосновать полученные выводы;

в анализе и интерпретации полученных результатов.

Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	**Введение в анализ**	Операции над множествами. Основные числовые множества. Функции одной переменной. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция. Последовательности, предел числовой последовательности. Теоремы о пределах. Признаки существования пределов. Первый и второй замечательный пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, связь между ними. Сравнение бесконечно малых величин. Раскрытие неопределенностей. Непрерывность функций. Точки разрыва. Классификация точек разрыва. Теоремы о непрерывных функциях на отрезке. Непрерывность элементарных функций.

2.	**Дифференциальное исчисление функций одного переменного.**	Производная: определение, механический и геометрический смысл. Уравнение касательной к кривой. Дифференцируемость функций, связь непрерывности с дифференцируемостью. Обратная функция и ее дифференцирование. Таблица основных правил и формул дифференцирования. Производные высших порядков. Дифференциал функции, его применение в приближенных вычислениях. Достаточные признаки монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое и достаточные условия. Выпуклость кривой, точки перегиба. Необходимое и достаточные условия. Асимптоты кривой.
3.	**Интегральное исчисление функций одной переменной.**	Определение первообразной. Теорема о бесконечном множестве первообразных для данной функции. Понятие неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные свойства неопределенного интеграла. Интегрирование методами замены переменной и по частям. Рациональные дроби и их интегрирование. Понятие определенного интеграла и его основные свойства. Теорема о среднем. Площадь криволинейной трапеции. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла методами замены переменной и по частям. Несобственные интегралы. Приложения определенного интеграла: площадь фигуры в декартовых координатах, объем тела вращения, длина дуги плоской кривой, работа переменной силы.
4.	**Функции нескольких переменных. Элементы теории функций комплексного переменного.**	Область определения и график функции двух переменных. Линии и поверхности уровня. Частные производные и дифференциалы. Полное приращение и полный дифференциал, его применение. Производная сложной функции, производная неявно заданной функции. Уравнение касательной к кривой $F(x, y) = 0$. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$. Производная по направлению. Градиент. Частные производные высших порядков. Экстремумы функции двух переменных. Условные экстремумы; наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой ограниченной области. Элементы теории функций комплексного переменного. Комплексные числа, алгебраические действия над ними. Основные трансцендентные функции. Формулы Эйлера.

5.	**Дифференциальные уравнения**	Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Дифференциальное уравнения 1-го порядка: общее и частное решение (интеграл), задача Коши, формулировка теоремы существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли. Дифференциальные уравнения 2-го порядка: общее и частное решение (интеграл), задача Коши, формулировка теоремы существования и единственности решения уравнения $y'' = f(x, y, y')$. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка: структура общего решения однородного и неоднородного уравнений. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Системы дифференциальных уравнений. Нормальная форма системы. Отыскание решения системы методом сведения к одному дифференциальному уравнению.

Основные теоретические сведения

с образцами решения типовых заданий

Тема1. Функция.

*Опр*1: Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число –x, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Опр2: Всякий интервал, содержащий точку a, называется окрестностью точки a.

Интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, т.е. множество точек x таких, что $|x-a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется ε-окрестностью точки a.

*Опр*3: Если каждому элементу x множества X ($x \in X$) соответствует не более одного значения y множества У ($y \in Y$), то говорят, что на множестве X задана функция y=f(x). При этом x называется переменной (или аргументом), y – зависимой переменной, а буква f обозначает закон соответствия. Множество X – область определения (или существования) функции, а множество У – область значений функции.

Способы задания функций.

1. Аналитический способ: если функция задана формулой вида y = f(x).

Пример: 1) $y = 5x^3 + \sqrt{x}$ - аналитическая запись функции;

2) Не следует смешивать функцию с ее аналитическим выражением. Так, одна функция $g(x) = \begin{cases} x, & если\ x < 0, \\ x^2, & если\ x \geq 0 \end{cases}$ имеет два аналитических выражения: x (при $x < 0$) и x^2 (при $x \geq 0$).

2. *Табличный способ*: функция задается таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции f(x).

Пример: таблица логарифмов.

3. Графический способ: изображение графика функции – множества точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты – соответствующие им значения функции y = f(x).
4. Словесный способ: функция описывается правилом ее составления.

Пример: Функция Дирихле: f(x) = 1, если x – рациональное; f(x) = 0, если x – иррационально.

*Оп*р4: Пусть y = f(x) есть функция от независимой переменной x, определенной на множестве X с областью значений У. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ единственное значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве У с областью значений X, называется обратной. Обозначение: $y = f^{-1}(x)$.

Пример: Для функции $y = a^x$ обратной будет функция $y = \log_a x$.

*Оп*р5: Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений У, а переменная u в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией.

Пример: $y = \lg \cos x$ - сложная функция, т.к. ее можно представить в виде $y = \lg u$, где $u = \cos x$.

1. Классификация функций.

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Опр.: Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий.

К числу алгебраических функций относятся:

1) целая рациональная функция (многочлен или полином): $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$;
2) дробно – рациональная функция – отношение двух многочленов;
3) иррациональная функция (если в составе операций над аргументом имеется извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется трансцендентной. К числу трансцендентных функций относятся функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические.

2. Применение функций в экономике.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1) *Функция полезности* (функция предпочтений) – в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.
2) *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.
3) *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) – зависимость обьема производства от наличия или потребления ресурсов.
4) *Функция издержек* (частный вид производственной функции) - зависимость издержек производства от обьема продукции.
5) *Функция спроса, потребления и предложения* – зависимость спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Тема 2. Пределы и непрерывность. Бесконечно большие и бесконечно малые величины.

Опр1: если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}: a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Пример1: 2, 4, 6,…,2n,… (монотонная, неограниченная);

0, 1, 0, 1,… (не монотонная, ограниченная).

Опр2: Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N (зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами n > N верно неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности *обозначается* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$.

Опр3: Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

1. *Предел функции в бесконечности.*

Опр4: Число А называется пределом функции y = f(x) при x, стремящемся к бесконечности, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число S > 0 (зависящее от ε; S = S(ε)), что для всех x таких, что $|x| > S$ верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

2. *Предел функции в точке.*

Опр5: Число А называется пределом функции f(x) при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от $\varepsilon, \delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ (1), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Опр6: Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to x_0$, или при $x \to \infty$, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0$.

Пример: 1) $\lim\limits_{x\to x\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, то f(x) = cosx при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ есть бесконечно малая величина.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{4x+31} = 0$, то $g(x) = \dfrac{3}{4x+31}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малая величина.

Опр7.: Функция f(x) называется бесконечно большой величиной при $x \to x_0$, если для любого, даже сколь угодно большого положительного числа M > 0, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от M, $\delta = \delta(M)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > M$.

Пример: 1) $\lim\limits_{x\to x\frac{\pi}{2}} tgx = \infty$, то f(x) = tgx при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ есть бесконечно большая величина.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5x-6} = \infty$, то $g(x) = \sqrt{5x-6}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно большая величина.

Первым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Замечание: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=\dfrac{3}{2}$.

Второй замечательный предел. Рассмотрим числовую последовательность с общим членом $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Опр8: Числом e (вторым замечательным пределом) называется предел числовой последовательности: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. $e\approx 2{,}718281...$

$e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ или $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=e^{15}$.

Опр9: Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке x_0 (т.е. $\exists f(x_0)$);

2) имеет конечный предел функции при $x\to x_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Опр10: Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если эта функция в данной точке не является непрерывной.

Опр11: Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции f(x), если существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x\to x_0$. Если эти пределы равны друг другу, но не равны общему пределу функции в этой точке, то это точка устранимого разрыва. Если же эти пределы не равны между собой, то это неустранимая точка.

Опр12: Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции f(x), если хотя бы один из односторонних пределов слева или справа равен бесконечности или не существует.

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-7^{n+1}}{4^n+7^n}$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель выражения на 7^n. После преобразований получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-7^{n+1}}{4^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n-7}{\left(\frac{4}{7}\right)^n+1}=-7.$$

(Так как при $n \to \infty$ выражение $\left(\frac{4}{7}\right)^n$ стремится к нулю по свойству показательной функции с основанием 0<a<1).

ПРИМЕР 2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x+5}{2x+5}$

Решение.

Имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы устранить её, разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{1+0+0}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty .$$

ПРИМЕР 3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$.

Решение.

Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$. Чтобы раскрыть её, умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное ему выражение $\sqrt{x+2} + \sqrt{x}$. Получим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\infty} = 0 .$$

ПРИМЕР 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{tg\,5x}$

Решение.

Имеем неопределенность вида “0/0”. Подвергнем функцию преобразованию, чтобы получить возможность использовать первый замечательный предел;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x}{\frac{\sin 5x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos 5x}{5\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{1}{5\cdot 1} = \frac{1}{5} .$$

ПРИМЕР 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x})^x$.

x→∞

Решение.

Имеем неопределённость вида 1^∞. Чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом, преобразуем данную функцию:

$$\lim_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x})^x = \lim_{x\to\infty} (1+\frac{(-2)}{x})^x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} .$$

Тема 3. Производная.

Пусть функция y = f(x) определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

*Опр*1: Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует): $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Обозначения: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$. Иногда: y'_x.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Опр2: Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется дифференцируемой на этом промежутке.

Геометрический смысл производной: Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой y = f(x) в точке x_0, т.е. $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной к кривой y = f(x) в точке x_0 примет вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Механический смысл производной: Производная пути по времени $s'(t_0)$ есть скорость точки в момент t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью.

Теорема: Если функция y = f(x) дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство: По условию функция y = f(x) дифференцируема в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, где $f'(x_0)$ - постоянная величина, не зависящая от Δx.

Тогда на основании теоремы о связи б.м. с пределами: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - б.м. величина при $\Delta x \to 0$.

Или $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

При $\Delta x \to 0$: $\Delta y \to 0$, следовательно, функция y = f(x) в точке x_0 является непрерывной.

Обратная теорема неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке.

Правила дифференцирования.

1. Производная постоянной равна нулю, т.е. $c' = 0$.

2. Производная аргумента равна 1, т.е. $x' = 1$.

В следующих правилах будем полагать, что $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - дифференцируемые функции.

3. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т.е. $(u + v)' = u' + v'$.
4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4.1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(cu)' = c \cdot u'$.

4.2. Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные, например: $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.
6. Если y = f(u) и u = φ(x) – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной, т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$.
7. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Таблица производных элементарных функций.

Функция y		Производная y'
1.	x^2	2x
2.	x^3	$3x^2$
3.	u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4.	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5.	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$
6.	e^u	$e^u \cdot u'$

7.	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8.	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
9.	$\log_a u$	$\frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
10.	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
11.	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
12.	tgu	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13.	$ctgu$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14.	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15.	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16.	$arctgu$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17.	$arcctgu$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Производная неявной функции.

Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций, заданных в виде y = f(x). Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением F(x, y)=0.

Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

Производная высших порядков.

До сих пор мы рассматривали производную $f'(x)$ от функции f(x), называемую производной первого порядка. Но производная первого порядка $f'(x)$ сама является функцией, которая может иметь производную.

Опр.: Производной n-го порядка называется производная от производной (n – 1)-го порядка.

Обозначение: $f''(x)$ - второго порядка (или вторая производная);

$f'''(x)$ - третьего порядка (или третья производная).

Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например, $f^{(4)}(x),...,f^{(n)}(x)$ или $f^{IV}(x)$ и т.д.

Механический смысл второй производной: вторая производная пути по времени $s''(t_0)=\blacksquare'(t_0)\overline{\ }=v'(t_0)$ есть скорость изменения скорости ил ускорение точки в момент t_0.

Опр3: Дифференциалом функции называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной: $dy=f'(x)\Delta x$.

Замечание: Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy=f'(x)dx$, откуда $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$. Видно, что это не просто символ, а обычная дробь.

Опр4: Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2y функции y = f(x) называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е. $d^2y=d(dy)$.

Опр5: Дифференциалом n-го порядка (или n-м дифференциалом) d^ny называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка этой функции, т.е. $d^ny=d(d^{n-1}y)$.

Справедливо равенство $d^ny=f^{\smile}(x)dx^n$, т.е. дифференциал n-го порядка равен произведению n-го порядка на n-ю степень дифференциала независимой переменной.

Имеем, $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Продифференцировать функцию: $y=\arcsin^5(\cos(2-4x))$.

Решение.

Находим производную данной функции по правилам дифференцирования сложной функции:

$$y'=5\arcsin^4(\cos(2-4x))\cdot(\arcsin(\cos(2-4x)))'=5\arcsin^4(\cos(2-4x))\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(2-4x)}}\times$$

$$\times(\cos(2-4x))'=\frac{5\arcsin^4(\cos(2-4x))}{\sin(2-4x)}\cdot(-\sin(2-4x))\cdot(-4)=20\arcsin^4(\cos(2-4x))$$

ПРИМЕР 2. Найти производную функции, заданной неявно: $x^3+x^2y+y^2=0$.

Решение.

Дифференцируем данную функцию по *x:*

$y'_x=3x^2+2xy+x^2y'+2yy'$, откуда $y'=-\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$.

ПРИМЕР 3. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 1 - 2\cos t \end{cases}$.

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(1-2\cos t)'}{(t+\sin t)'}\,\frac{2\sin t}{1+\cos t}.$$

Тема 4. Приложения производной.

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ферма: Если дифференцируемая на промежутке X функция y = f(x) достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма: В точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля: Пусть функция y = f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b);

3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс; в этой точке производная и будет равна нулю (заметим, что на рис. таких точек две: ξ_1 и ξ_2).

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так: Между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа: Пусть функция y = f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т.е. $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Механический смысл теоремы Лагранжа: Существует хотя бы одна точка внутри отрезка такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: Если перемещать прямую АВ параллельно начальному положению, найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a,b)$. В которой касательная к графику f(x) и хорда АВ, параллельны.

Следствие: Если производная функции f(x) равна нулю на некотором промежутке X, то функция тождественно постоянна на этом промежутке.

Правило Лопиталя.

Теорема: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Итак, если имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Опр1: Функция y = f(x) называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема1 (достаточное условие возрастания функции): Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.

Теорема2 (достаточное условие убывания функции): Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.

Геометрический смысл: Если касательные к кривой в некотором промежутке направлены под острыми углами к оси абсцисс, то функция возрастает, если под тупыми, то убывает.

Опр2: Точка x_0 называется точкой максимума функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Опр3: Точка x_1 называется точкой минимума функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_1)$.

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно максимумом и минимумом функции. Максимум и минимум функции объединяются общим названием экстре-

мума функции.

Теорема: Для того, чтобы функция y = f(x) имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Опр4: Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, называются критическими (или стационарными).

Критические точки должны входить в О.О.Ф. Если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка критическая. Обратное утверждение неверно, т.е. критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума.

Теорема: Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции y = f(x) меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции y = f(x), а если с минуса на плюс, - то точка минимума.

Схема исследования функции y = f(x) на экстремум.

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.
3) Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.
4) Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Второе достаточное условие экстремума.

Теорема: Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $f'(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 - точка максимума.

Схема отыскания наибольшего и наименьшего значений на отрезке:

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.
3) Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из наибольшее $f_{наиб}$ и наименьшее $f_{наим}$.

Опр5: Функция y =f(x) называется выпуклой вниз на промежутке X, если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Опр6: Функция называется выпуклой вверх (вогнутой) на промежутке X, если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Теорема1: Функция выпукла вниз (вверх) на промежутке X тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонная возрастает (убывает).

Геометрический смысл: Если $f'(x)$ возрастает (убывает) на X, то возрастает (убывает) угол наклона касательных к графику.

Теорема2 (достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх)): Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

Опр7: Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Из определения следует, что точки перегиба – это точки экстремума первой производной.

Теорема3 (необходимое условие перегиба): Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е. $f''(x_0) = 0$.

Теорема4 (достаточное условие перегиба): Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Геометрический смысл точек перегиба: В окрестности точки x_1 функция выпукла вверх и график ее лежит ниже касательной, проведенной в этой точке. В окрестности точки x_2, на которой функция выпукла вниз, график лежит выше касательной. В точке же перегиба x_0 касательная разделяет график – он лежит по разные стороны касательной.

Замечание: Если критическая точка дифференцируемой функции не является точкой экстремума, то она есть точка перегиба.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1) Найти вторую производную функции $f''(x)$.
2) Найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.
3) Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба.
4) Найти значения функции в точках перегиба.

Опр8: Асимптотой графика функции y = f(x) называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Теорема1: Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x \to x_0 - 0$ (слева) или при $x \to x_0 + 0$ (справа) равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции y = f(x).

Вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции y = f(x) или на концах ее области определения (a, b), если a и b – конечные числа.

Теорема2: Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Тогда прямая y = b есть *горизонтальная* асимптота графика функции y = f(x).

Замечание: Если конечен только один из пределов $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_л$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_п$, то функция имеет лишь *левостороннюю* $y = b_л$ или *правостороннюю* $y = b_п$ горизонтальную асимптоту.

Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, функция может иметь *наклонную* асимптоту.

Теорема3: Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x и существует конечные пределы $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$. Тогда прямая y = kx + b является *наклонной* асимптотой графика функции y = f(x).

Наклонная асимптота может быть правосторонней или левосторонней.

Общая схема исследования функций и построения их графиков.

1. Найти О. О. Ф.
2. Исследовать функцию на четность – нечетность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Исследование функции проводится одновременно с построением ее графика.

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Найти область определения функции $y = \dfrac{x}{2\cos x + 1}$

Решение.

Данная функция определена для всех *x*, не обращающих в нуль знаменатель, т.е. не являющихся корнями уравнения $2\cos x + 1 = 0$. Это все числа вида $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Таким образом, область определения *D(y)* - вся числовая прямая, кроме точек $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

ПРИМЕР 2. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-1} - 2}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, т.е. числитель и знаменатель просто меняются местами. Т.о., применением этого правила в данном случае не позволяет раскрыть неопределенность $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = 1.$

ПРИМЕР 3. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ по схеме.

Решение.

1. $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.
2. Функция четная, т.к. ее график симметричен относительно оси ординат и $f(-x) = f(x)$.
3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках $x = \pm 1$.

   $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$, то прямая x = 1 – вертикальная асимптота.

   В силу симметричности графика f(x) x = -1 также вертикальная асимптота.
4. Поведение функции в бесконечности.

   Вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1$. В силу четности $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тогда прямая y = -1 – горизонтальная асимптота.
5. Экстремумы и интервалы монотонности.

$f'(x)=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$; $f'(x)=0$ при x = 0 и $f'(x)$ не существует при $x=\pm 1$.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

$f''(x)=\dfrac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$.

$f''(x)>0$ на (-1; 1) и функция выпукла вниз на этом интервале.

$f''(x)<0$ на интервалах $(-\infty;-1),(1;+\infty)$ и на этих интервалах функция выпукла вверх.

Точек перегиба нет.

7. Точки пересечения с осями: (0; 1) – точка пересечения с осью ординат.

Уравнение f(x) = 0 решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

ПРИМЕР 4. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{\ln x}{x}$

Решение.

Функция определена и непрерывна в интервале (0;+∞). В граничной точке $x=0$ области определения функция имеет бесконечный разрыв, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$.

Так как в точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой. Найдем уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ (если она существует).

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0;$$

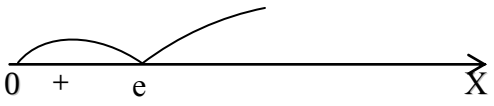
$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(При нахождении пределов воспользовались правилом Лопиталя).

Итак, $k=b=0$ и уравнение асимптоты $y=0$. Таким образом, график имеет в качестве асимптот оси координат.

Найдем производную функции и критические точки:

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Стационарная критическая точка: $x=e$. Исследуем знак производной на интервалах(0;e) и (e;∞).



-

Составим таблицу:

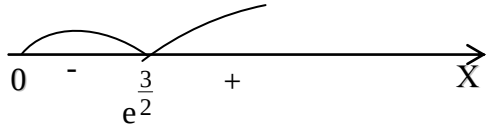
x	(0;e)	e	(e;+∞)
y`	+	0	-
y	возрастает	max	убывает

Экстремум функции: $y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Найдем вторую производную и значения x, при которых график может иметь точку перегиба:

$y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$, $y'' = 0$ при $x = e^{\frac{3}{2}}$.

Определим знак второй производной в интервалах $(0; e^{\frac{3}{2}})$ и $(e^{\frac{3}{2}}; +\infty)$:

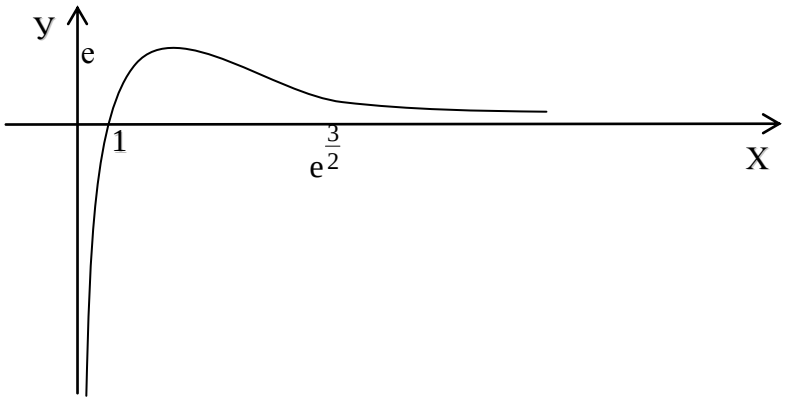


Составим таблицу:

x	$(0; e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}48$	$(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$
y``	-	0	+
график	выпуклый	точка перегиба	вогнутый

$y(e^{\frac{3}{2}}) = 3/(2e^{\frac{3}{2}}) \approx 0.33$

График пересекает ось абсцисс в точке (1;0). Точек пересечения с осью ординат нет. Строим эскиз графика функции:

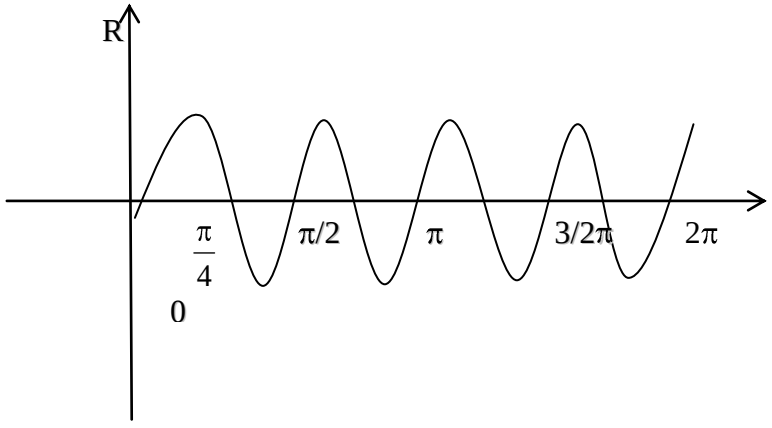


ПРИМЕР 5. Построить график функции, заданной уравнением в полярных координатах

$r = \sin 4\varphi$

Решение.

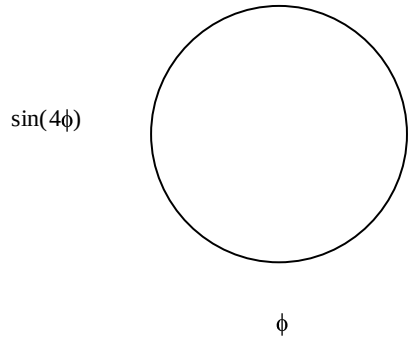
Построим график данной функции в декартовых координатах для $\varphi \in [0; 2\pi]$:



Из этого графика видно, что при $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\pi;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$ имеем $r \geq 0$.

Поэтому требуемый график будет находиться в секторах, соответствующих данным значениям φ, а также в секторах, симметричных им относительно начала координат (в силу того, что перед φ стоит чётный коэффициент).

Учитывая характер изменения r в этих промежутках (от 0 до 1 и затем снова до 0) получим следующий график (восьмилепестковую розу):



Тема 5. Функции нескольких переменных.

Опр1: Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Переменные $x_1, ..., x_n$ называются независимыми переменными или аргументами, z – зависимая переменная, а символ f означает закон соответствия. Множество X называется О.О.Ф. Очевидно, это подмножество n-мерного пространства.

Примеры функций нескольких переменных:

1. Функция $z = a_1 x_1 + ... + a_n x_n + b$, где $a_1, ..., a_n, b$ - постоянные числа, называется линейной. Ее можно рассматривать как сумму n линейных функций от переменных $x_1, ..., x_n$.

2. Функция $z = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$ (b_{ij} - постоянные числа) называется квадратической. Эта функция не раскладывается в сумму функций одной переменной.

Функцию двух переменных (n = 2) будем обозначать $z = f(x, y)$. Тогда ее область определения X есть подмножество координатной плоскости Oxy.

Опр2: Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0) \in X$ называется круг, содержащий точку M_0.

Опр3: Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным отношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве.

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ полезно рассматривать функции одной переменной $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$, представляющие сечения графика $z = f(x, y)$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz, т.е. плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$.

Опр4: Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, таких, что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно C. Число C называется уровнем.

Предел и непрерывность.

Опр5: Число A называется пределом функции z = f(x, y) при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или в точке (x_0, y_0)), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), такое, что для всех точек (x, y), отстоящих от точки (x_0, y_0) на расстояние $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ меньшее, чем δ (т.е. $0 < \rho < \delta$), выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Опр6: Функция z = f(x, y) называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если она:

1) определена в точке (x_0, y_0);
2) имеет конечный предел при $x \to x_0$ и $y \to y_0$;
3) этот предел равен значению функции в точке (x_0, y_0), т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Геометрический смысл непрерывности: График в точке (x_0, y_0) представляет собой сплошную, нерасслаивающуюся поверхность.

Опр7: Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении к нулю (если этот предел существует).

Обозначение: z'_x, z'_y или $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$.

Т.о., для функции z = f(x, y) $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$,

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Опр8: Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т.е. $dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$.

Учитывая, что для функций f(x, y)=x, g(x, y) = y, имеем $df = dx = \Delta x$; $dg = dy = \Delta y$, тогда $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Опр9: Функция z = f(x, y) называется дифференцируемой в точке (x, y), если ее полное приращение может быть представлено в виде $\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$, где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Дифференциал функции нескольких переменных представляет собой главную, линейную относительно приращений Δx и Δy, часть полного приращения функции.

Для функции нескольких переменных существование частных производных является лишь необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции.

Теорема (Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных): Если частные производные функции z = f(x, y) существуют в окрестности точки (x, y) и непрерывны в самой точке (x, y), то функция z = f(x, y) дифференцируема в этой точке.

Опр10: Производной z'_l по направлению l функции двух переменных z = f(x, y) называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, т.е. $z'_l = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}$.

Производная z'_l характеризует скорость изменения функции в направлении l.

$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta$.

Опр11: Градиентом ∇_z функции z = f(x, y) называется вектор с координатами $(z'_x; z'_y)$.

Скалярное произведение $(\nabla_z; \vec{e}) = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta$.

Замечание: Производная по направлению есть скалярное произведение градиента ∇_z и единичного вектора, задающего направление l.

Градиент функции ∇_z в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Теорема: Пусть задана дифференцируемая функция z = f(x, y) и пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$, величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.

Опр11: Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции z = f(x, y), если существует окрестность точки M_0, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) \leq f(x, y))$.

Теорема (необходимое условие экстремума): Пусть точка (x_0, y_0) - есть точка экстремума дифференцируемой функции z = f(x, y). Тогда частные производные $f_x'(x_0, y_0)$ и $f_y'(x_0, y_0)$ в этой точке равны нулю.

Опр12: Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции z = f(x, y) называются критическими или стационарными.

Следствие: В точке экстремума обращаются в нуль производные функции по всем направлениям.

Опр13: Если частные производные $z_x' = f_x'(x, y)$ и $z_y' = f_y'(x, y)$ - дифференцируемые функции, то можно найти также и их частные производные, которые называются частными производными второго порядка.

Обозначение: $z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y)$, $z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y)$ и $z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y)$, $z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y)$.

Утверждение: Если частные производные второго порядка функции z = f(x, y) непрерывны в точке (x_0, y_0), то в этой точке $f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0)$.

Теорема (достаточное условие экстремума): Пусть функция z = f(x, y):

1) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $f_x'(x_0, y_0) = 0$ и $f_y'(x_0, y_0) = 0$;

2) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $f_{xx}''(x_0, y_0) = A$, $f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0) = B$, $f_{yy}''(x_0, y_0) = C$.

Тогда,

1. Если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция z = f(x, y) имеет экстремум, причем

   а) если $A < 0$ - максимум;

   б) если $A > 0$ - минимум.

2. Если $\Delta = AC - B^2 < 0$, функция z = f(x, y) экстремума не имеет.

3. Если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Схема исследование функции двух переменных на экстремум:

1. Найти частные производные функции z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти критические точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Опр14: Функция z = f(x, y), заданная на выпуклом множестве D, называется выпуклой вниз, если для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1; y_1) + f(x_2; y_2)}{2}$, и выпуклой вверх, если $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1; y_1) + f(x_2; y_2)}{2}$.

Замечание: Для выпуклой функции равенство ее частных производных нулю является не только необходимым, но и достаточным условием экстремума.

Экстремум выпуклой функции является глобальным, т.е. наименьшим значением в случае функции, выпуклой вниз, и наибольшим в случае функции, выпуклой вверх.

Опр15: Точка (x_0, y_0) называется точкой условного максимума (минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x, y) из этой окрестности удовлетворяющих условию g(x, y) = C, выполняется неравенство: $f(x_0, y_0) \ge f(x, y)$ $(f(x_0, y_0) \le f(x, y))$.

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение

Обозначим $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, тогда условие $(x \to 0, y \to 0) \Leftrightarrow \rho \to 0$. Запишем предел в виде

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2}(-2\rho)}{1} = 0.$$

ПРИМЕР 2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Решение

Будем приближаться к точке (0; 0) по прямым y = kx.

Если y = kx, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \dfrac{2k}{1+k^2}$.

Получили, что значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Но т.к. предел функции не должен зависеть от способа приближения точки (x, y) к точке (0, 0), то рассматриваемый предел не существует.

ПРИМЕР 3. Найти экстремумы функции $z = \dfrac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

Решение

1. Находим частные производные функции $z'_x = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ и $z'_y = \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$.

2. Находим критические точки функции: $\begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0, \\ \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1;1), (1;-1), (-1;1), (-1;-1)$.

3. Находим частные производные второго порядка: $z''_{xx} = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^2}$; $z''_{yx} = z''_{xy} = 0$;

   $z''_{yy} = \dfrac{4y(y^2-3)}{(1+y^2)^2}$, вычисляем их значения в каждой критической точке и проверяем в ней выполнение достаточного условия экстремума.

(1; 1) – точка максимума;

(-1; -1) – точка минимума;

в точках (1; -1) и (-1; 1) экстремума нет.

4. Найти экстремумы функции: $z_{\max} = z(1;1) = 2$; $z_{\min} = z(-1;-1) = -2$.

Тема 6. Интегральное исчисление

Опр1: Функция F(x) называется первообразной функцией для функции f(x) на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пример: $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ - первообразная для функции $f(x) = x^2$, т.к. $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Геометрический смысл производной: $F'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = F(x)$ в точке с абсциссой x. Геометрически найти первообразную для f(x) – значит найти такую кривую $y = F(x)$, что угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точке x равен значению f(x) заданной функции в этой точке.

Замечание: Для заданной функции f(x) ее первообразная определена неоднозначно.

Теорема: Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные для функции f(x) на некотором промежутке X, то найдется такое число C, что будет справедливо равенство $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Опр2: Совокупность всех первообразных для функции f(x) на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Т.о., $\int f(x)dx = F(x) + C$, где F(x) – некоторая первообразная для f(x), C – произвольная постоянная.

Пример: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется интегрированием этой функции.

Достаточным условием интегрируемости функции на промежутке X является непрерывность этой функции на данном промежутке.

Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$, где C – произвольное число.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, где α-некоторое число.

5. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица интегралов элементарных функций.

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, для произвольного интервала, не содержащего точки x = 0.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, -a < x < a, a > 0$.

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, a \neq 0$.

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

Метод замены переменной.

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$ - функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Теорема: Пусть F(x) некоторая первообразная для функции f(x). Тогда $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$, где k и b – некоторые числа, $k \neq 0$.

Метод интегрирования по частям.

Пусть u = u(x) и v = v(x) – дифференцируемые функции. Тогда по свойству дифференциала $d(uv) = vdu + udv$ или $udv = d(uv) - vdu$.

Интегрируя левую и правую части последнего равенства, получаем $\int udv = uv - \int vdu$.

Типы интегралов, для нахождения которых используется формула интегрирования по частям.

1. $\int x^n e^{ax} dx$.

2. $\int x^n \sin mx dx$, $\int x^n \cos mx dx$.

3. $\int x^k \ln^n x dx$.

4. $\int x^k \arcsin x dx$, $\int x^k \arccos x dx$, $\int x^k arctgx dx$, $\int x^k arcctgx dx$, где a, m, k – действительные числа ($k \neq -1$), n – целое положительное число.

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Многочленом степени n называется выражение вида $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, где $a_0, a_1, ..., a_n$ - действительные числа $a_n \neq 0, n \geq 0$. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов.

Если подынтегральная $\frac{f(x)}{g(x)}$ - правильная дробь, знаменатель $g(x)$ которой – многочлен степени n, имеющий n попарно различных действительных корней $x_1, x_2, ..., x_n$, то существует представление подынтегральной функции в виде $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + ... + \frac{A_n}{x - x_n}$, где $A_1, A_2, ..., A_n$ - некоторые числа. Тогда исходный интеграл сводится к сумме табличных.

Опр.: Пусть предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ при $\max_i \Delta x_i \to 0$ существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $x_1, x_2, ...$ и точек $\xi_1, \xi_2, ...$. Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции y = f(x) на $[a, b]$, обозначается $\int_a^b f(x) dx$, а сама функция y=f(x) называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, т.е. $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$;

a – нижний предел, b – верхний предел;

функция f(x) – подынтегральная функция;

выражение f(x)dx – подынтегральное выражение.

Замечание: $\int f(x) dx$ представляет семейство функций, а $\int_a^b f(x) dx$ есть определенное число.

Полагаем по определению, что $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

$\int_a^a f(x)dx = 0$.

Геометрический смысл определенного интеграла.

В случае, когда функция y = f(x) неотрицательна на отрезке $[a, b]$, где a < b, $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S под кривой y = f(x) на $[a, b]$.

Достаточное условие существования определенного интеграла (интегрируемости функции).

Теорема: Если функция y = f(x) непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, где α - некоторое число.
2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
3. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. $\forall a, b, c$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
4. Если на отрезке $[a, b]$, где a < b, $f(x) \le g(x)$, то и $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$, т.е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

Следствие: Пусть на отрезке $[a, b]$, где a < b, $m \le f(x) \le M$, где m и M – некоторые числа. Тогда $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

5. *Теорема о среднем*: Если функция y = f(x) непрерывна на отрезке $[a, b]$, (где a < b), то найдется такое значение $\xi \in [a, b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Теорема: Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная для f(x) на [a,b]. Тогда определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной F(x) на этом отрезке, т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона – Лейбница.

Доказательство:

1. Пусть F(x) – некоторая первообразная для функции f(x).
2. По теореме2 функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - первообразная для f(x).
3. Т.к. F(x) и Φ(x) – первообразные для f(x), то $\exists C$, F(x)=Φ(x) + C.
4. Тогда рассмотрим $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + c) - (\Phi(a) + c) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Метод замены переменной в определенном интеграле.

Теорема: Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$;
2) функция f(x) непрерывна в каждой точке x вида $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$.

Тогда справедливо следующее равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ – *формула замены переменной в определенном интеграле*.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Теорема: Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ - *формула интегрирования по частям для определенного интеграла*.

Несобственные интегралы.

Пусть функция y = f(x) определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a,t]$, т.е. функция $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ определена для произвольного $t \geq a$.

Опр3: Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от функции f(x) на полуинтервале $[a,+\infty)$ называется функция Φ(t) при $t \to +\infty$, т.е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$.

Замечание1: Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся* (к данному пределу), в противном случае – *расходящимся*.

Опр4: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{b} f(x)dx$ - несобственный интеграл от функции f(x) на полуинтервале $(-\infty, b]$.

Опр5: Интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ - несобственным интегралом на интервале $(-\infty;+\infty)$.

Опр6: Если $\exists a$ такое, что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся. Если хотя бы один из интегралов расходится, то этот интеграл называется расходящимся.

Несобственные интегралы от неограниченных функций.

1. Пусть функция y = f(x) непрерывна, но не является ограниченной на полуинтервале [a, b).

Опр7: Если существует и конечен предел $\lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$, где $\delta > 0$, то он называется несобственным интегралом от функции y = f(x) на [a, b) и обозначается $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, т.е. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$.

В этом случае несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

2. Пусть функция y = f(x) непрерывна и неограниченна на полуинтервале [a, b), тогда $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$ - несобственным интегралом от функции y = f(x) на [a, b).

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot 3}{2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$.

б) $\int\frac{dx}{9x^2-1}=\int\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1/3}{x+1/3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|+C$.

в) $\int\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2dx=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C$.

г) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx=\int dx-4\int\frac{dx}{x^2+4}=x-4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C=x-2arctg\frac{x}{2}+C$.

ПРИМЕР 2. Найти $\int\frac{dx}{1-2x}$.

Решение.

Положим t = 1 – 2x, тогда $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t$, $dx=d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)'dt=-\frac{1}{2}dt$, тогда

$$\int\frac{dx}{1-2x}=\int\frac{(-1/2)dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C.$$

ПРИМЕР 3. Найти $\int e^{-2x+7}dx$.

Решение.

$\int e^{kx+b}dx=\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$. Полагая, что k = -2, b = 7, имеем $\int e^{-2x+7}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x+b}+C$.

Рассмотрим примеры нахождения интегралов с помощью нелинейных подстановок.

ПРИМЕР 4. Найти $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

Положим $t=1-x^2$. Тогда $dt=d(1-x^2)=(1-x^2)'dx=-2xdx\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

ПРИМЕР 5. Найти неопределённый интеграл $I=\int x^4\cdot\sqrt[4]{1-3x^5}dx$.

Решение.

Введем подстановку $t=1-3x^5$, откуда $dt=-15x^4dx$. Тогда $I=-\frac{1}{15}\int\sqrt[4]{t}dt$. Находим полученный табличный интеграл и возвращаемся к прежней переменной:

$$I=-\frac{1}{15}\int t^{\frac{1}{4}}dt=-\frac{1}{15}\cdot\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+C=-\frac{4}{75}\sqrt[4]{t^5}+C=-\frac{4}{75}\sqrt[4]{(1-3x^5)^5}+C.$$

ПРИМЕР 6. Найти неопределённый интеграл $I=\int\frac{x^2dx}{7x^3+1}$.

Решение.

Подведем под знак дифференциала знаменатель подынтегральной дроби:

$$I=\int\frac{\frac{1}{21}d(7x^3+1)}{7x^3+1}=\frac{1}{21}\int\frac{d(7x^3+1)}{7x^3+1}=\frac{1}{21}\ln|7x^3+1|+C.$$

ПРИМЕР 7. Найти неопределённый интеграл $I=\int x\,arctg\,x\,dx$.

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. В данном случае:

$u = arctg\, x, dv = x\,dx, du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = \dfrac{x^2}{2}$. Подставляя эти выражения в формулу, получим:

$$I = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctg\, x + C.$$

ПРИМЕР 8. Найти интеграл $\int x\, e^{-2x} dx$.

Решение.

Т.к. x = 1, а функция e^{-2x} при интегрировании практически не изменяется, то данный интеграл можно на2йти интегрированием по частям, полагая u = x, $dv = e^{-2x}dx$. Тогда

$v = \int dv = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$; $du = dx$.

Применяя данную формулу имеем

$$\int x\, e^{-2x} dx = x\left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C.$$

ПРИМЕР 9. Найти $\int x^2 \sin x dx$.

Решение

Положим $u = x^2, \sin x dx = dv$. Тогда $du = dx^2 = 2x dx, v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x$.

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

ПРИМЕР 10. Найти $\int \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx$

Решение.

Т.к. $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x+4)(x+2)$, то $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x-2} + \dfrac{A_3}{x+4}$.

Из последнего равенства найдем постоянные A_1, A_2, A_3. Приводя дроби правой части к общему знаменателю, приходим к равенству: $A_1(x-2)(x+4) + A_2 x(x+4) + A_3 x(x-2) = x^2 - 2x + 2$.

Если x = 0, то $A_1 = -\frac{1}{4}$. Если x = 2, то $A_2 = \frac{1}{6}$. Если x = -4, то $A_3 = \frac{13}{12}$.

Тогда

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{13}{12}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{13}{12}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + C.$$

ПРИМЕР 11. Вычислить:

а) $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

б) $\int_1^2 2^{3x-4} dx = \frac{1}{3} \cdot \left.\frac{2^{3x-4}}{\ln 2}\right|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(2^2 - 2^{-1}\right) = \frac{7}{6\ln 2}$.

в) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$.

ПРИМЕР 12. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Решение

1. Пусть a = 0, тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx$.

2. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} (e^0 - e^t) = 1$, т.е. первый из интегралов сходится к 1.

$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} e^x dx = \lim_{t\to+\infty} (e^t - 1) = +\infty$, т.е. $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$ расходится и. Следовательно, расходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

ПРИМЕР 14. Вычислить интеграл $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$ или установить его расходимость.

Решение.

Точка $x = 1$ является особой точкой, поскольку подынтегральная функция имеет в ней бесконечный разрыв. Поэтому:

$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) \Big|_{0}^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \ln \left| \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \right| - \ln 1 \right) = \frac{1}{2}(-\infty - 0) = -\infty$ - получили бесконечный предел.

Таким образом, данный интеграл расходится.

Тема 7. Ряды.

Опр1: Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$, соединенных знаком сложения: $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

Числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называются членами ряда, а член u_n - общим или n-м членом ряда.

Опр2: Сумма n первых членов ряда S_n называется n-й частичной суммой ряда.

Опр3: Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется расходящимся.

Свойства сходящихся рядов:

1. Если ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ сходится и имеет сумму S, то и ряд $\lambda u_1 + \lambda u_2 + ... + \lambda u_n + ...$ также сходится и имеет сумму λS.

2. Если ряды $u_1+u_2+...+u_n+...$ и $v_1+v_2+...+v_n+...$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то и ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+...+(u_n+v_n)+...$ также сходится, и его сумма равна S_1+S_2.

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.

Опр4: Ряд, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется n-м *остатком ряда*, т.е. $r_n=u_{n+1}+u_{n+1}+...+u_{n+m}+...=\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m$.

Замечание: Сумму ряда можно представить в следующем виде: $S=S_n+r_n$.

4. Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы при $n\to\infty$ остаток ряда стремился к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$.

Теорема (необходимый признак сходимости): Если ряд сходится, то предел его общего члена u_n при $n\to\infty$ равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Следствие: Если предел общего члена ряда при $n\to\infty$ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$, то ряд расходится.

Далее мы будем рассматривать достаточные признаки сходимости.

Теорема (признак сравнения): Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. при $\forall n\ u_n\le v_n$. Тогда

1) Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) Если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Замечание: Отметим «эталонные» ряды:

1) геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ - сходится при $|q|<1$, расходится при $|q|\ge 1$;
2) гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходится;
3) обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$.

Теорема (предельный признак сравнения): Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, то ряды одновременно сходятся, либо расходятся.

Теорема (признак Даламбера): Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения (n + 1)- го члена к n-му члену $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Тогда,

1) если $D < 1$, то ряд сходится;
2) если $D > 1$, то ряд расходится;
3) если $D = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Замечание: Если $D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд расходится.

Теорема (интегральный признак сходимости): Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, т.е. $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$, а функция f(x), определенная при $x \geq 1$, непрерывная и невозрастающая и $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, …, $f(n) = u_n$, …

Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Ряды с членами произвольного знака.

Опр5: Знакочередующийся ряд – это ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$, где $u_n > 0$.

Теорема (признак Лейбница): Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ и предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена: $S \leq u_1$.

Опр6: Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (1)- знакопеременный ряд, если любой его член u_n может быть как положительным, так и отрицательным.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда): Если ряд, составленных из абсолютных величин данного ряда (1) $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$ (2) сходится, то сходится и данный ряд.

Замечание: Обратное утверждение неверно, т.е. ряд (2) может расходиться, а ряд (1) сходится.

Опр7: Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходятся как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Опр8: Ряд называется условно сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Понятие о степенном ряде. Область сходимости степенного ряда.

Опр9: Ряд вида $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$, где $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ - коэффициенты, членами которого являются степенные функции, называется степенным рядом

Опр10: Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля:

1) Если степенной ряд сходится при значении $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и, притом абсолютно, при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$.

2) Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| > |x_1|$.

Замечание1: Из теоремы Абеля следует, что $\exists R \geq 0$ такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ - расходится.

Число R – радиус сходимости, интервал $(-R; R)$ - интервал сходимости.

Замечание2: На концах интервала сходимости, т.е. при x = -R и x = R, ряд может как сходится, так и расходится.

Замечание3: Если $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ существует, то он и является радиусом сходимости ряда.

Замечание4: У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку (R = 0), у других охватывает всю ось Ox ($R = \infty$).

Свойства степенных рядов:

Пусть функция f(x) является суммой степенного ряда, т.е. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, тогда

1) На любом отрезке $[a; b]$, целиком принадлежащем интервалу сходимости (-R; R), функция f(x) является непрерывной, а следовательно, степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b c_0 dx + \int\limits_a^b c_1 x dx + ... + \int\limits_a^b c_n x^n dx + ...$

2) В интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать: $f'(x) = c_1 + 2c_2x + ... + nc_nx^{n-1} + ...$

Замечание: При интегрировании или дифференцировании полученные ряды имеют тот же радиус сходимости R, что и первоначальный ряд.

Ряд Маклорена.

Пусть $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ...$ Выразим коэффициенты ряда через f(x).

1) Для этого найдем производные функции f(x):

$f'(x) = c_1 + 2c_2x + ... + nc_nx^{n-1} + ...,$

$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x... + n(n-1)c_nx^{n-2} + ...,$

$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4x + ... + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} + ...,$

……

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot 3 \cdot 2c_n + ...$

2) Положим в полученных равенствах x =0, т.е. $f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2!c_2$, …., $f^{(n)}(0) = n!c_n$.

3) Выразим коэффициенты: $c_0 = f(0)$, $c_1 = f'(0)$, $c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$, …, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

4) Подставим значения коэффициентов в функцию: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$ - ряд Маклорена.

Замечание: Не все функции могут быть разложены в ряд Маклорена (необходимо, чтобы ряд был сходящимся).

Теорема1: Для того, чтобы ряд Маклорена сходился к функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ остаток ряда стремился к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ для всех значений x из интервала сходимости ряда.

Теорема2: Если функция f(x) разложима в ряд Маклорена, то это разложение единственное.

Замечание: Ряд Маклорена является частным случаем рядом Тейлора:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$ при $x_0 = 0$.

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций:

1) $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

область сходимости ряда $(-\infty;+\infty)$.

2) $f(x)=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$

область сходимости ряда $(-\infty;+\infty)$.

3) $f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...$

область сходимости ряда $(-\infty;+\infty)$.

4) $f(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+\frac{m(m-1)\cdot...\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+...$

где $m\in R$ - биномиальный ряд.

Интервал сходимости (-1; 1); на концах интервала зависит от отдельного случая.

5) $f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+...$

область сходимости ряда: $(-1;1]$.

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Исследовать сходимость геометрического ряда, т.е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии: $a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$.

Решение.

Необходимо установить, при каких значениях знаменателя прогрессии q ряд сходится и при каких – расходится.

$S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$, $q\neq 1$. Возможно несколько случаев:

1) если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1}-\frac{a}{q-1}\right)=\frac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма $S=\frac{a}{1-q}$;

2) если $|q|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q>1,\\ q<-1\end{array}\right.$, то $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$ не существует вообще $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует. Значит, ряд расходится;

3) если $q=1$, то ряд примет вид: $a+a+...+a+...$, $S_n=\underbrace{a+a+...+a}_{n}=na\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$, т.е. ряд расходится;

4) если $q=-1$, то ряд примет вид: $a-a+...+(-1)^{n-1}a+...,\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_n=0, если\ \ n-четное, \\ S_n=a, если\ \ n-нечетное \end{array}\right.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, следовательно, ряд расходится.

Т.о., геометрический ряд сходится к сумме $S=\dfrac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

ПРИМЕР 2. Найти сумму ряда: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}+...$

Решение.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1};$$

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

ПРИМЕР 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n+3}{5n-7}$.

Решение:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+3}{5n-7}=\dfrac{4}{5}\neq 0$, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

ПРИМЕР 4. Исследовать сходимость ряда: $1+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 3^2}+...+\dfrac{1}{n\cdot 3^{n-1}}+...$

Решение.

1) Сравним данный ряд со сходящимся геометрическим рядом $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^{n-1}}+...$

($q=\dfrac{1}{3}<1$).

2) Т.к. члены данного ряда, начиная со второго, меньше членов сходящегося геометрического ряда: $\dfrac{1}{2\cdot 3}<\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{3\cdot 3^2}<\dfrac{1}{3^2}$; …; $\dfrac{1}{n\cdot 3^{n-1}}<\dfrac{1}{3^{n-1}}$, то на основании признака сравнения ряд сходится.

ПРИМЕР 5. Исследовать сходимость ряда: $\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+...$

Решение.

1) Сравним данный ряд с гармоническим $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$, мысленно отбросив его первый член.

2) $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}>\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}>\frac{1}{3}$; …; $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}>\frac{1}{n}$, т.е. члены данного ряда больше членов расходящегося гармонического ряда, то на основании признака сравнения ряд расходится.

ПРИМЕР 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}$.

Решение.

1) Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (*подсказка*: $\frac{2n^2+5}{n^3}\approx\frac{2}{n}$ при достаточно больших n).

2) Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^3}:\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2}=2\neq 0$, то данный ряд, так же как и гармонический, расходится.

ПРИМЕР 7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$

Решение.

Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости знакоположительного ряда. Найдём предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0.$$

Так как данный предел не равен нулю, то не выполняется необходимое условие сходимости ряда, следовательно, он расходится.

ПРИМЕР 8. Исследовать сходимость рядов:

1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+...+\frac{n}{2^n}+...$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Решение.

1) $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

2) $D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\dfrac{3^n n!}{n^n}\right)=3\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{3}{e}>1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

ПРИМЕР 9. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Решение.

1) Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$.

2) Функция f(x) при x > 0 положительная и невозрастающая, поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$.

3) $I=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\dfrac{dx}{x^\alpha}$: а) если $\alpha=1$, то $I=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$;

б) если $\alpha\neq 1$, то

$$I=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}\ при\ \alpha>1;\\ \infty\ при\ \alpha<1\end{cases}$$

4) Итак, данный ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

ПРИМЕР 10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решение.

Т.к. члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $1>\dfrac{1}{2^2}>\dfrac{1}{3^2}>\ldots>\dfrac{1}{n^2}>\ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$, то по признаку Лейбница ряд сходится.

ПРИМЕР 11. Найти область сходимости степенного ряда: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Решение.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$

1) Найдем интервал сходимости ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}:\frac{2^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2\sqrt{3^{n+1}}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$ интервал

сходимости ряда - $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Выясним поведение ряда на концах интервала сходимости:

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$: $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-...+\frac{(-1)^n}{n^2}+...$ - этот ряд сходится по признаку Лейбница;

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2n+1)^2}+...$ - обобщенный гармонический ряд при $\alpha=2$ - сходится.

Область сходимости ряда: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

б) $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, т.е. область сходимости ряда: $(-\infty;+\infty)$.

ПРИМЕР 12. Разложить в ряд функции: а) $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$; б) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение.

а) $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$

1) $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+...$

2) $1-e^{-x^2}=-x^2+\frac{x^4}{2!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+...$

3) $\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=1-\frac{x^2}{2!}+...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{n!}+...$

область сходимости ряда $(-\infty;+\infty)$.

б) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

1) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+...$

2) $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...\frac{x^n}{n}-...$

3) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...\right)$

область сходимости ряда: (-1; 1).

ПРИМЕР 13. Разложить функцию $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ в ряд по степеням x.

Решение.

Разложим функцию в ряд Маклорена. Учитывая, что $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, разложим функцию на сумму двух более простых:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Далее преобразуем:

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}; \quad \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x}.$$

Воспользуемся разложением:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., |x| < 1.$$

Получим $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{*1}{1 - \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ (при $\frac{|x|}{2} < 1$, т.е. при $\frac{|x|}{2} < 2$)

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}; \left|\frac{x}{2}\right| < 1, \text{ то есть } |x| < 2.$$

Аналогично получим второе разложение:

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n; |x| < 1.$$

Тогда:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} - \left(-\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot x^n.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + ...$$

Тема 8. Дифференциальные уравнения.

Опр1: ДУ называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков.

Опр2: ДУ называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одной переменной. В противном случае – уравнением в частных производных.

Опр3: ДУ n – го порядка называется разрешенным относительно старшей производной, если оно имеет вид: $y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, где F – некоторая функция от (n+1) переменной.

Опр4: Решением ДУ называется такая функция y = y(x), которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Опр5: Общим решением ДУ n –го порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$, которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Замечание: Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними.

Опр6: Частным решением ДУ называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

ДУ первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

Опр1: ДУ первого порядка называется уравнение вида $y' = f(x, y)$, где f – некоторая функция двух переменных.

Опр2: Множество Г – это множество точек плоскости Oxy, на котором функция f(x,y) определена.

Замечание: Множество Г является открытым (Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую окрестность этой точки).

Геометрический смысл уравнения $y' = f(x, y)$: Производная функции y' представляет угловой коэффициент касательной к кривой y = y(x) в точке с абсциссой x. Следовательно, это уравнение каждой точке Oxy сопоставляет направление $tg\alpha = f(x, y)$ касательной к интегральной кривой y = y(x), проходящей через эту точку.

Опр3: Решить уравнение – значит найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений.

Теорема: Пусть в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция f(x,y) и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на открытом множестве Г координатной плоскости Oxy. Тогда:

1) Для всякой точки (x_0, y_0) множества Г найдется решение y = y(x) уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$;

2) Если два решения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$ совпадают хотя бы для одного значения $x = x_0$, т.е. если $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x, для которых они определены.

Опр4: Ду первого порядка $y' = f(x, y)$ называется неполным, если функция f явно зависит либо только от x, либо только от y.

Типы неполных ДУ первого порядка:

1. $y' = f(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dy = f(x)dx \Leftrightarrow y = \int f(x)dx$.

2. $y' = f(y)$. В данном случае y – независимая переменная, x – функция, тогда $\frac{dy}{f(y)} = dx$, тогда $x = \int \frac{dy}{f(y)}$.

Опр5: ДУ первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ или в виде $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$, где f(x), M(x), P(x) – некоторые функции переменной x, g(y), N(y), Q(y) – функции переменной y.

Для решения преобразовывают к виду: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Опр6: ДУ первого порядка называется однородное, если оно может быть представлено в виде $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$, где g – некоторая функция одной переменной.

Опр7: Функция y = f(x, y) называется однородной степени k, если для произвольного числа α выполняется равенство $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y)$.

Общий способ решения однородного ДУ:

1) Замена: $z = \frac{y}{x}$.

2) Найти $g(z) - z$.

3) Решить уравнение: $\frac{dz}{g(z) - z} = dx$.

4) Произвести обратную замену.

Опр8: ДУ первого порядка называется линейным, если оно имеет вид $y' + f(x)y = g(x)$, где f(x) и g(x) непрерывные функции переменной x.

Опр9: Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Способ решения уравнения:

1) Положим $y = u(x)v(x)$.

2) $y' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v + uv' + f(x)uv = g(x) \Leftrightarrow vu' + u(v' + f(x)v) = g(x)$.

3) Найдем какое-либо частное решение $v' + f(x)v = 0$.

4) Тогда $vu' = g(x)$.

Т.е., мы свели решение уравнения к решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.

Если ДУ имеет вид $y'' = f(x)$, то оно решается последовательным интегрированием.

1. Если в запись уравнения не входит искомая функция y(x), т.е. оно имеет вид $G(x, y', y'') = 0$, то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию $z = y'$.

2. Если в уравнение не входит переменная x, т.е. оно имеет вид $G(y, y', y'') = 0$, то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять y, а за независимую функцию - $z = z(y) = y'$.

Опр1: Линейное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y'' + py' + qy = r(x)$, где $p, q \in R$, r(x) – функция.

Опр2: Если $r(x) \equiv 0$, то это уравнение называют однородным, в противном случае – неоднородным.

Теорема:

1. Пусть характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет действительные корни λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2. Если характеристическое уравнение имеет один корень λ, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$.

3. Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Метод вариации произвольных постоянных:

1) Находим общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

2) Решение уравнения находится в виде $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = r \end{cases}$.

Образцы решения типовых заданий.

ПРИМЕР 1. Решить уравнение: $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

Решение.

Разделим на : $x\sqrt{y^2+1}(x \neq 0)$

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} \Leftrightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} \Leftrightarrow \ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C.$$

ПРИМЕР 2. Решить уравнение: $y' = tg\,x\,tg\,y$.

Решение.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первой степени с Разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$y' = tg\,x\,tg\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = tg\,x\,tg\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{tg\,y} = tg\,x\,dx \Leftrightarrow ctg\,y\,dy = tg\,x\,dx.$$

Проинтегрируем части последнего равенства:

$$\int ctg\,y\,dy = \int tg\,x\,dx \Rightarrow \ln|\sin\,y| = -\ln|\cos x| + C \Rightarrow \ln|\sin\,y| = \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|.$$

$$\sin\,y = \frac{C}{\cos x}.$$

$y = \arcsin\frac{C}{\cos x}$ - общее решение данного уравнения.

ПРИМЕР 3. Решить уравнение $y' = \frac{x+2y}{x}$.

Решение.

1) $\frac{x+2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x}$.

2) Пусть $z = \frac{y}{x}$, тогда $g(z) - z = 1 + 2z - z = 1 + z$.

3) $\frac{dz}{1+z} = dx \Leftrightarrow \ln|1+z| = x + C \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+y}{x}\right| = x + C$.

ПРИМЕР 4. Решить уравнение: $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x};\ y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Данное дифференциальное уравнение относится к типу однородных дифференциальных уравнений $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, которые решаются с помощью подстановки $\frac{y}{x} = t$.

Отсюда: $y = tx, y' = t'x + t$.

После подстановки в исходное уравнение получим: $t'x + t = t + \sin t \Leftrightarrow t'x = \sin t$.

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \sin t \Leftrightarrow \frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя обе части, получим:

$$\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \ln|Cx| \Rightarrow tg\left(\frac{t}{2}\right) = Cx \Rightarrow t = 2arctg\, Cx$$

Используя обратную подстановку, получим: $\frac{y}{x} = 2arctg\, Cx$

Окончательно имеем обще решение в виде: $y = 2x\, arctg\, Cx$.

Теперь, чтобы найти частное решение, подставляем в общее решение начальное условие:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 \cdot arctg\, C \cdot 1 \Rightarrow arctg\, C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = tg\frac{\pi}{4} = 1.$$

Искомое частное решение: $y = 2x\, arctg\, x$.

ПРИМЕР 5. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение.

1) $xy' - 2y = 2x^4 \Rightarrow y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$. Пусть $y = uv$.

2) $y' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = 2x^3 \Leftrightarrow vu' + u(v' - \frac{2}{x}v) = 2x^3$.

3) $v' - \frac{2}{x}v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|v| = 2\ln|x| \Leftrightarrow v = x^2$.

4) $vu' = g(x) \Leftrightarrow u'x^2 = 2x^3 \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow u = x^2 + C$.

5) Тогда $y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$.

ПРИМЕР 6. Решить уравнения: а) $xy'' + y' = 0$; б) $2yy'y'' = (y')^2 + 1$

Решение.

а) Пусть $z = y'$, тогда $y'' = z'$, тогда уравнение примет вид $xz' + z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow z = \frac{C_1}{x}$.

$$y' = \frac{C_1}{x} \Leftrightarrow dy = \frac{C_1 dx}{x} \Leftrightarrow y = C_1 \ln|x| + C_2.$$

б) Пусть $z = z(y) = y'$, тогда $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z$, тогда уравнение примет вид

$$2yzz' = z^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln(z^2+1) = \ln|y| + C \Rightarrow z = \pm\sqrt{y \ln C - 1}.$$

$$z = y' \Rightarrow \pm\frac{dy}{\sqrt{y \ln C - 1}} = dx \Leftrightarrow \pm\sqrt{y \ln C - 1} = \frac{\ln C}{2}(x + C_1) \Leftrightarrow y \ln C - 1 = \frac{\ln^2 C}{4}(x + C_1)^2.$$

ПРИМЕР 7. Найти частное решение уравнения при указанных начальных условиях:

$y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 3, y'(0) = 4$.

Решение.

1) Решаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

2) Находим общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

3) Найдем такие значения C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия:

$y(0) = C_1 + C_2$;

$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$; $y'(0) = C_1 + 2C_2$;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

4) Тогда по теореме о существовании и единственности решения уравнения найденное частное решение $y = 2e^x + e^{2x}$ искомое.

ПРИМЕР 8. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Решение.

1) $y'' - 3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2) $\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0, \\ C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -1, \\ C_2' = e^{-x} \end{cases}$ - ДУ с разделяющимися переменными.

$$\begin{cases} C_1 = -x + C_3, \\ C_2 = -e^{-x} + C_4 \end{cases}.$$

Тогда $y = (-x + C_3)e^x + (-e^{-x} + C_4)e^{2x} = C_3 e^x + C_4 e^{2x} + (-x - 1)e^x$.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

Основная литература

1. *Барашков А.С.* Математика. – М.:АСТ: СЛОВО; Владимир: ВКТ, 2011
2. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Математика для экономического бакалавриата. Учебник (Грф МО РФ) – М: Инфра-М, 2011.
3. *Кремер Н.Ш.* Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин и др. – 3-е изд. перераб. и доп. (Гриф МО РФ) – М.: Высшее образование, 2010.
4. *Кремер Н.Ш.* Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики. Учеб.-справочное пособие / Под ред. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин. – М.: Высшее образование, 2010.
5. *Макаров С.И.* Математика для экономистов [Электронный ресурс]: электронный учебник. – 2-е изд., стереотип. – М.: КноРус, 2009 (1CD-ROM).

Дополнительная литература

6. *Вержбицкий В.М.* Вычислительная линейная алгебра. (Гриф МО) – М.: Высшая школа, 2009.
7. *Клюшкин В.М.* Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие для вузов (Гриф МО РФ). – М.: Инфра-М, 2009.
8. *Шевцов Г.С.* Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты. - М: Магистр. ИНФРА-М, 2011.
9. *ЕрмаковаВ.И.* Общий курс высшей математики для экономистов.– М.: ИНФРА-М, 2007.
10.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов.-13-е изд.-М.: Наука,1987.-360 с.
11.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебное пособие для втузов: В 2-х т. Т.1.Т.2.-Стереотип.изд. .-М:Интеграл-Пресс,2000.-415с.
12.Мантуров О.В. Курс высшей математики: Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Численные методы. Теория вероятностей: Учебник для втузов.-.:Высш.шк.,1991.-448с.

Методические указания:

13.Математика. Математический анализ: Метод. указ./Сост.: Б.Я.Солон - Иваново: ИГХТУ,2005.-42 с. № 939.
14.Дифференциальные уравнения: Метод. указ./Сост.: Е.М. Михайлов. - Иваново: ИГХТУ,2009.-24 с. №371.
15.Тесты по высшей математике. Часть 1: Метод. указ./Сост.: Е.В. Комарова, Е.Л. Никологорская. - Иваново: ИГХТУ,2009.-36 с. № 355.

Ссылки на интернет-ресурсы, необходимые для изучения настоящей дисциплины:

1. http://exponenta.ru/educat/class/class.asp (Internet-класс по высшей математике)
2. http://mathelp.spb.ru/la.htm - лекции по линейной алгебре

3. http://www.mathem.h1.ru/ - математика On-Line
4. http://www.imamod.ru/magazin - журнал «Математическое моделирование»
5. http://www.i-exam.ru - интернет – тестирование
6. Allmath.ru – математический портал, на котором опубликованы материалы по различным разделам математики.
7. http://lib.susu.ac.ru/main1/index.html Электронные информационные ресурсы по естественным наукам на сайте Научной библиотеки ЮУрГУ.
8. http://a-geometry.narod.ru/problems/problems.htm - Сборник задач по аналитической геометрии.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Числовая последовательность и ее предел. Число e.
2. Функция одной переменной, область определения и способы задания функции. Основные свойства функций. Элементарные функции.
3. Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Эквивалентные бесконечно малые. Основная теорема о пределе функции.
4. Свойства пределов. Замечательные пределы и раскрытие неопределенностей.
5. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
6. Производная функции в точке (схема вычисления). Механический и геометрический смысл производной. Дифференцирование суммы, произведения, частного функций.
7. Таблица производных элементарных функций. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции в точке. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
8. Производные высших порядков. Дифференцирование сложных функций. Теорема о производной обратной функции.
9. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа).
10. Правило Лопиталя. Применение правила Лопиталя к раскрытию неопределённостей.

11.Экстремум функции одной переменной. Необходимое и достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

12.Выпуклость функции. Необходимое и достаточное условие выпуклости вверх (вниз). Точки перегиба.

13.Асимптоты и способы их нахождения.

14.Исследование функций с помощью производных и построение графиков (общая схема).

15.Функции нескольких переменных (определение, способы задания, линии уровня, график).

16.Частные производные и экстремумы функций нескольких переменных.

17.Первообразная и неопределенный интеграл. Геометрический смысл неопределённого интеграла.

18.Простейшие правила интегрирования. Свойства неопределенного интеграла.

19.Методы вычисления неопределенного интеграла (непосредственное интегрирование, интегрирование методом подстановки, интегрирование по частям).

20.Определенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница.

21.Свойства определенного интеграла.

22.Методы интегрирования в определенном интеграле (замена переменной, интегрирование по частям).

23.Понятие площади плоской фигуры, свойства площади. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

24.Вычисления объема тела вращения с помощью определенного интеграла.

25.Вычисление площади поверхности вращения с помощью определенного интеграла.

26.Несобственные интегралы с переменным верхним пределом (1–го рода).

27.Несобственные интегралы от неограниченной функции (2–го рода).

28.Понятие числового ряда и его сходимости. Свойства сходящихся числовых рядов.

29.Необходимый признак сходимости числового ряда с положительными членами.

30.Гармонические ряды.

31.Числовые ряды с положительными членами. Признаки сравнения двух рядов с положительными членами.

32.Числовые ряды с положительными членами. Признак Даламбера сходимости рядов.

33.Числовые ряды с положительными членами. Признаки Коши сходимости рядов.

34.Знакочередующиеся числовые ряды. Признак Лейбница.

35.Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость.

36.Функциональные и степенные ряды. Область и радиус сходимости.

37.Разложение в степенной ряд основных элементарных функций. Применение степенных рядов.

38.Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решение дифференциального уравнения.

39.Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, их интегрирование.

40.Однородные дифференциальные уравнения, их интегрирование.

41.Линейные дифференциальные уравнения 1–го порядка, их интегрирование.

42.Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, их общее решение.

43.Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, их общее решение.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ “МАТЕМАТИКА”

для студентов групп: ЭЗ –11, 11С

экономического факультета МФ БИЭПП

Задание № 1. Составить краткий конспект по теме, номер которой в списке вопросов к зачёту, соответствует **двум последним цифрам** номера зачётной книжки. Для номеров, которые больше 32 соответствует остатку от деления № зачетной книжки на количество вопросов (32). Например 137:32 = 4 (ост 9), т.е. номер варианта – 9. При вычислениях на калькуляторе (для особо одарённых) лучше **вычитать** из номера зачётной книжки число 32 до тех пор, пока не получится число меньше 32. Это и будет номер варианта. ☺ В конспекте желательно представить теоретический материал по теме и не менее 2 примеров или контрпримеров, при необходимости сделать чертежи.

(В каждом следующем задании **M – последняя цифра** номера зачетной книжки)

Задание № 2. Вычислите предел, используя замечательные пределы и основные эквивалентности, (не пользуясь правилом Лопиталя):

а) $\lim\limits_{x\to M}\dfrac{x-M}{x^2-(M+1)x+M}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2(M+1)x}{\sin^2 x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[(M+2)]{1+\sin(M+6)x}-1}{tg(M+3)x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2((M+2)x+1)}{(e^{(M+4)x}-1)^2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-M}{x^2-(M+1)x+M}$

Задание № 3. Найдите производные y'_x данных функций:

а) $y=3\sqrt{x^5+(M+3)x^4-\dfrac{M+5}{5}}$ б) $y=\ln(\sin^4(M+5)x+e^{x^{(M+3)}})$ в) $y=\operatorname{arctg}(tgx)^{(3+M)}$

Задание № 4. Найдите частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ функции $U(x; y)$

$$U(x; y) = x^2 + (M+2)\,y^2 + (M-3)xy + (M-4)x + (M+6)y + (M^2+5)$$

Задание № 5. Вычислите интегралы:

а) $\int(x+(M+3))^2((M+2)x-(M+5))dx$ б) $\int\dfrac{\sin(M+1)x}{e^{\cos(M+1)x}}dx$ в) $\int\dfrac{dx}{(x+(M-1))(x+(M+7))}$

г) $\int x(M+7)^{x^2}dx$ д) $\int\limits_1^{M+2}x\log_{(M+2)}x\,dx$

Задание № 6. Вычислите площадь фигуры, заключённой между кривыми

$y=(x-(M+1))^2+M+3;\quad y=x+4$ с помощью определённого интеграла.

Задание № 7. Исследуйте ряды на сходимость: (**F – количество букв в Вашей фамилии**)

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(M+22)n^2-(F-2)n+F}{(M+8)n^2-F}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(M+10)n}{(M+25)n+F}\right)^n$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{26n-(F+9)}{(M+2)^n(n-1)!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(M+3)n+(F-12)}{n+(F+8)}\right)^{2n}$

Задание № 8. Исследуйте ряд на абсолютную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(M+5)n+(F-7)}$

Задание № 9. Решите дифференциальные уравнения:

а) $y^{III}-(M+4)y^{II}+y^{I}-(M+4)y=0$

б) $y'=(M+2)+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$.